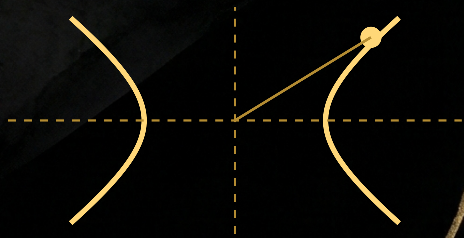
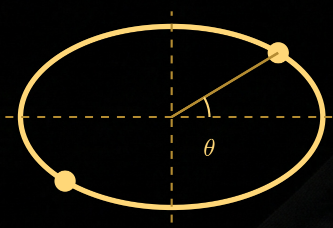
# 三角之道



椭圆：$P\left(\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2},\dfrac{2bt}{1+t^2}\right)$

双曲线：$P\left(\dfrac{a(1+t^2)}{1-t^2},\dfrac{2bt}{1-t^2}\right)$

其中 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$




主编：西门秋　雪履千山客　仙瞳

# 前言

前言

在高考数学的终极战场，圆锥曲线向来是区分天才与庸才的天堑。韦达定理、对偶式、曲线系方程、定比分点、调整法、对合、仿射变换、齐次化及斜率双用等方法，是无数前辈用血泪铸就的破局之术，也是代数变形领域的几柄重器。而本书，将为你开辟一条前所未有的制胜之道：三角参数换元。它绝非旁门左道的技巧补充，而是对代数繁冗与几何直觉的深度重构，是你撕裂圆锥曲线桎梏的又一柄利刃。

本合集作为3.0版本的迭代，摒弃了冗余的题海堆砌，以39道精选题为骨，以系统性的原理讲解为魂，只为让你在有限的时间里，击穿核心，直指本质。

关于不联立方法的修炼，切忌贪多求全。高中三年的时间是定量的，高考的考察是多维的，数学的疆域也远不止于圆锥曲线。在确保其他学科阵地不失的前提下，你只需精通两三种足以致命的手段，便足以立于不败之地。

以本三角代换合集为例，修炼之路只有两条：其一，浅尝辄止，仅能应对最基础的单动点与顶点弦问题，作为考场应急的备选；其二，沉心彻悟，将除弦长中点等生僻枝节之外的所有核心技巧熔于一炉，让三角法成为你信手拈来的破局利器。

对于绝大多数考生而言，不存在第三条路。除非你对三角法的热爱已深入骨髓，达到不学则寝食难安的程度，并有绝对的把握不会因此动摇其他学科的根基。

原因很简单：若你只想在特定题型中偶尔一试，那么第一层级的熟练度便已足够；但若你想让三角代换成为常规联立之外的绝对备选，就必须做到炉火纯青，绝无半分含糊。否则，在高考的高压之下，任何一丝犹豫，都将成为你溃败的导火索。

最后，若你决意踏上这条道路，请务必潜心笃志。合集内容精炼，每一个字都经过反复推敲，建议你反复研读两至三遍。须知，三角法的计算量未必总是小于联立，其真正的核心价值，在于为你提供了一种全新的思考维度，而非执着于所谓的"秒杀"。

愿你以此为刃，劈开混沌，直抵巅峰！

# 目录

# 第一章　三角换元法：从基础到进阶

## 1.1　三角解：解析几何的参数化艺术

在解析几何中，利用参数方程进行三角代换是简化运算的强力工具。通过三角恒等变换，我们可以将复杂的二次曲线坐标转化为统一的三角形式。

### 1.1.1　椭圆的半角代换

对于椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其不仅有参数方程 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$，更可以通过半角公式转化为有理分式形式，从而消去三角函数，转化为代数运算。

**椭圆万能公式推导**

将 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ 化为半角形式：

$$x=a\cos\theta=a\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=a\cdot\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=a\cdot\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$
$$y=b\sin\theta=b\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1}=b\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=b\cdot\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

若令 $\tan\frac{\theta}{2}=t$，则椭圆上任意一点 $P$ 可参数化为：

$$\boxed{P\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2bt}{1+t^2}\right)}$$

### 1.1.2　双曲线的半角代换

同理，对于双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，利用其参数方程 $x=a\sec\alpha,\ y=b\tan\alpha$，可得：

**双曲线万能公式推导**

$$x=a\sec\alpha=a\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=a\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=a\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=a\cdot\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$
$$y=b\tan\alpha=b\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=b\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=b\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

若令 $\tan\frac{\alpha}{2}=t$，则双曲线上任意一点 $P$ 可参数化为：

$$\boxed{P\left(\frac{a(1+t^2)}{1-t^2},\ \frac{2bt}{1-t^2}\right)}$$

**本质洞察：** 这种代换的本质是利用三角恒等变换将 $x,y$ 统一为一个参数 $t$ 的有理函数，极大地便利了后续关于斜率、共线等问题的代数运算。

## 1.2 顶点为何说三角才是最优解

### 顶点连线斜率公式

**椭圆：与四个顶点（轴端点）连线的斜率**

设椭圆
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
四个顶点分别为
$$A(-a,0),\ B(a,0),\ C(0,b),\ D(0,-b).$$
设椭圆上一点
$$P\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2bt}{1+t^2}\right),$$
则有
$$\begin{aligned}
k_{PA}&=\frac{y}{x+a}=\frac{bt}{a},\\
k_{PB}&=\frac{y}{x-a}=-\frac{b}{at},\\
k_{PC}&=\frac{y-b}{x}=\frac{b(t-1)}{a(t+1)},\\
k_{PD}&=\frac{y+b}{x}=\frac{b(1+t)}{a(1-t)}.
\end{aligned}$$

**双曲线：与实轴端点/虚轴端点连线的斜率**

设双曲线
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$
实轴端点 $A(-a,0),B(a,0)$，虚轴端点 $C(0,b),D(0,-b)$。设双曲线上一点
$$P\left(\frac{a(1+t^2)}{1-t^2},\ \frac{2bt}{1-t^2}\right).$$
则
$$k_{PA}=\frac{y}{x+a}=\frac{bt}{a},\qquad k_{PB}=\frac{y}{x-a}=\frac{b}{at}.$$
同时，注意：此时 $k_{PC},k_{PD}$ 的形式并不如椭圆简洁，但在需要时仍可算得
$$\begin{aligned}
k_{PC}&=\frac{b(2t-1+t^2)}{a(1+t^2)},\\
k_{PD}&=\frac{b(2t+1-t^2)}{a(1+t^2)}.
\end{aligned}$$

## 1.3 单动点题型演练

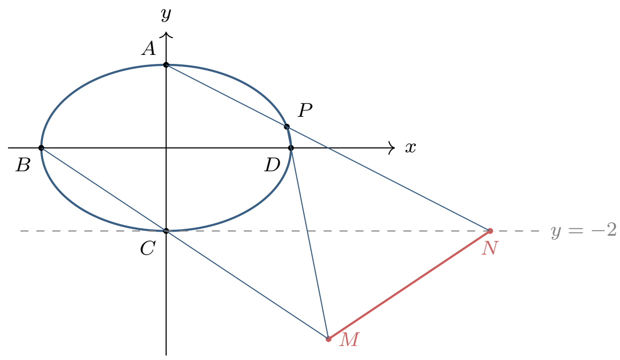
**例题 1：2023年北京卷**

**题目**：已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，椭圆 $E$ 的上、下顶点分别为 $A,C$，左、右顶点分别为 $B,D$，且 $|AC|=4$。

(1) 求椭圆 $E$ 的方程；

(2) 过椭圆上第一象限内任一点 $P$ 作 $PD$ 交 $BC$ 于点 $M$，作 $PA$ 交直线 $y=-2$ 于点 $N$。证明：直线 $MN\parallel CD$。

**解**：




(1) 由 $|AC|=4$ 知 $2b=4\implies b=2$。又离心率 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，得：

$$1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}\implies\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{9}\implies a^2=9.$$

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

(2) 设 $P\left(\dfrac{3(1-t^2)}{1+t^2},\dfrac{4t}{1+t^2}\right)$。由已知，各顶点坐标为 $B(-3,0)$，$D(3,0)$，$A(0,2)$，$C(0,-2)$。计算斜率：

$$k_{PD}=\frac{y_P-0}{x_P-3}=-\frac{2}{3t},\qquad k_{PA}=\frac{y_P-2}{x_P-0}=\frac{2(t-1)}{3(t+1)}.$$

直线方程如下：

$$PD:\ y=-\frac{2}{3t}(x-3),\qquad BC:\ y=-\frac{2}{3}(x+3).$$

联立解得 $PD$ 与 $BC$ 交点 $M$：

$$M\left(\frac{3(1+t)}{1-t},-\frac{4}{1-t}\right).$$

又直线 $PA$：$y=\frac{2(t-1)}{3(t+1)}x+2$，与直线 $l:y=-2$ 联立，解得交点 $N$：

$$N\left(-\frac{6(t+1)}{t-1},-2\right).$$

计算 $MN$ 的斜率：

$$k_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-2-\left(-\frac{4}{1-t}\right)}{-\frac{6(t+1)}{t-1}-\frac{3(1+t)}{1-t}}=\frac{\frac{2(1+t)}{1-t}}{\frac{3(1+t)}{1-t}}=\frac{2}{3}.$$

又 $C(0,-2),D(3,0)$，故 $k_{CD}=\frac{0-(-2)}{3-0}=\frac{2}{3}$。因为 $k_{MN}=k_{CD}$，所以 $MN\parallel CD$。

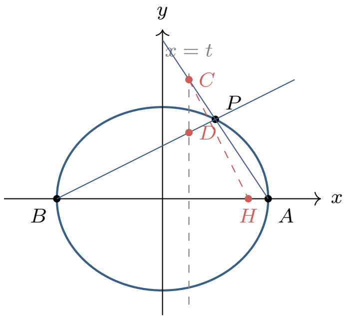
**例题 2：2025年开文优学名卷优选38套**

**题目：** 已知 $A(2,0), B(-2,0)$，$P(x,y)$ 是平面内一点（$y \neq 0$）。设直线 $AP, BP$ 的斜率分别为 $k_1, k_2$，且 $k_1k_2 = -\dfrac{3}{4}$。

(1) 求点 $P$ 的轨迹 $\Gamma$ 的方程；

(2) 若点 $P$ 在 $\Gamma$ 上，直线 $PA, PB$ 分别交动直线 $x = t$ 于点 $C, D$ ($t \neq \pm 2$)。过点 $C$ 作 $PB$ 的垂线交 $x$ 轴于点 $H$。则 $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HD}$ 是否存在最大值？若存在，求出最大值；若不存在，说明理由。

**解：**




(1) 由 $k_1k_2 = -\dfrac{3}{4}$ 得 $\dfrac{y}{x-2} \cdot \dfrac{y}{x+2} = -\dfrac{3}{4}$，整理得 $4y^2 = -3(x^2-4) \implies 3x^2+4y^2 = 12$。故轨迹 $\Gamma$ 为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$。$(x \neq \pm 2)$

(2) 设 $P\left(\dfrac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}, \dfrac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right)$。此时 $k_{PA} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2t_1}$，$k_{PB} = \dfrac{\sqrt{3}\,t_1}{2}$。直线 $PA, PB$ 方程分别为：$y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2t_1}(x-2)$，$y = \dfrac{\sqrt{3}\,t_1}{2}(x+2)$。令 $x = t$，得点 $C, D$ 坐标：

$$C\left(t, \frac{\sqrt{3}(2-t)}{2t_1}\right), \qquad D\left(t, \frac{\sqrt{3}\,t_1(2+t)}{2}\right).$$

由 $CH \perp PB \implies k_{CH} \cdot k_{PB} = -1$，得 $k_{CH} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}t_1}$。由题意，$H$ 是 $CH$ 与 $x$ 轴的交点，故 $H$ 的 $y$ 坐标为 0。直线 $CH$ 过点 $C\left(t, \dfrac{\sqrt{3}(2-t)}{2t_1}\right)$，斜率为 $k_{CH} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}t_1}$，方程为：

$$y - \frac{\sqrt{3}(2-t)}{2t_1} = -\frac{2}{\sqrt{3}t_1}(x-t).$$

令 $y = 0$，解得：

$$x = t + \frac{\sqrt{3}(2-t)}{2t_1} \cdot \frac{\sqrt{3}t_1}{2} = t + \frac{3(2-t)}{4} = \frac{4t+6-3t}{4} = \frac{t+6}{4}.$$

故 $H\left(\dfrac{t+6}{4}, 0\right)$。则向量 $\overrightarrow{HC} = \left(\dfrac{3t-6}{4}, \dfrac{\sqrt{3}(2-t)}{2t_1}\right)$，$\overrightarrow{HD} = \left(\dfrac{3t-6}{4}, \dfrac{\sqrt{3}\,t_1(2+t)}{2}\right)$。计算点积：

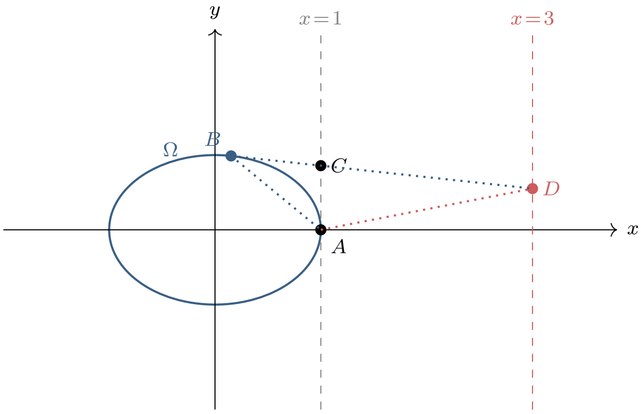
$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HD} = \left(\frac{3t-6}{4}\right)^2 + \frac{3(4-t^2)}{4} = -\frac{3}{16}(t+6)^2 + 12.$$

当 $t = -6$ 时，取得最大值 12。

**例题 3：Saikyo原创试题**

**题目：** 已知椭圆 $\Omega: x^2+2y^2=1$，右顶点 $A$。点 $B$ 在 $\Omega$ 上，切线 $\ell_B$ 交 $x=1$ 于 $C$。若切线 $\ell_B$ 上点 $D$ 满足 $\angle BAC$ 与 $\angle BAD$ 互补，求证：点 $D$ 在定直线上。

**证明：**




设 $B\left(\dfrac{1-t_0^2}{1+t_0^2}, \dfrac{\sqrt{2}\,t_0}{1+t_0^2}\right)$，右顶点 $A(1,0)$。
点 $B$ 处切线方程为 $\ell_B: xx_B+2yy_B=1$，切线上点 $D$ 可记为

$$D\left(x,\ \frac{1+t_0^2-x(1-t_0^2)}{2\sqrt{2}\,t_0}\right)$$

由题意 $\angle BAC+\angle BAD=180°$，即 $\tan\angle BAC=-\tan\angle BAD$。注意到 $AC$ 为竖直线（$C$ 在 $x=1$ 上），则 $\tan(\angle BAC+90°)=K_{AB}$，推导得

$$\tan\angle BAC=\sqrt{2}t_0$$

计算斜率：

$$k_{AB}=-\frac{\sqrt{2}}{2t_0},\qquad k_{AD}=\frac{1+t_0^2-x(1-t_0^2)}{2\sqrt{2}t_0(x-1)}.$$

代入倒角公式 $\tan\angle BAD=\left|\dfrac{k_{AD}-k_{AB}}{1+k_{AD}k_{AB}}\right|$，整理得：

$$\tan\angle BAD=\left|\frac{\sqrt{2}t_0[(t_0^2-1)+x(t_0^2+1)]}{-(1+5t_0^2)+x(1+3t_0^2)}\right|.$$

由 $\tan\angle BAD+\tan\angle BAC=0$，即 $\tan\angle BAD+\sqrt{2}t_0=0$，分类讨论去绝对值：

- 若 $\dfrac{\sqrt{2}t_0[(t_0^2-1)+x(t_0^2+1)]}{-(1+5t_0^2)+x(1+3t_0^2)}+\sqrt{2}t_0=0$，化简解得 $x=1$；
- 若 $-\dfrac{\sqrt{2}t_0[(t_0^2-1)+x(t_0^2+1)]}{-(1+5t_0^2)+x(1+3t_0^2)}+\sqrt{2}t_0=0$，化简解得 $x=3$。

因 $x=1$ 时点在右顶点切线上不合题意，故 $x=3$。即点 $D$ 在定直线 $x=3$ 上。

## 1.4 核心工具：两点式（双动点/多动点）

对于涉及两个或多个动点的问题，直接设点计算斜率或直线方程是高效的手段。

### 椭圆与双曲线的弦方程

**1. 椭圆两点式** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right)$$

- 斜率公式：$k_{AB}=\dfrac{b(t_1t_2-1)}{a(t_1+t_2)}$
- 弦 $AB$ 方程：$ay(t_1+t_2)-bx(t_1t_2-1)=ab(t_1t_2+1)$

**2. 双曲线两点式** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$A\left(\frac{a(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\frac{2bt_1}{1-t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{a(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\frac{2bt_2}{1-t_2^2}\right)$$

- 斜率公式：$k_{AB}=\dfrac{b(t_1t_2+1)}{a(t_1+t_2)}$
- 弦 $AB$ 方程：$ay(t_1+t_2)-bx(t_1t_2+1)=ab(t_1t_2-1)$

### 技巧点拨

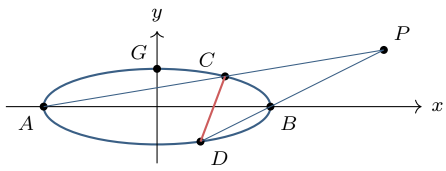
**应用技巧**：若直线过定点 $T(m,0)$，代入弦方程可得 $t_1t_2$ 的定值表达式：即 $t_1t_2=\dfrac{m-a}{m+a}$。这一结论与“共线斜率相同（即 $k_{AT}=k_{BT}$）”代入两点弦方程得到的结果一致。注意:上述T带入的是椭圆弦方程,双曲线也同理,也可以用斜率相同的方式书写过程

## 1.5　综合应用演练

**例题 4：2020年全国一卷**

**题目：** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 左右顶点 $A,B$，上顶点 $G$，且 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$。过 $P(6,t)$ 作 $PA,PB$ 交椭圆于 $C,D$，证 $CD$ 过定点。

**解：**




1. 由 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，设 $A(-a,0),B(a,0),G(0,1)$，则

$$(a,1)\cdot(a,-1)=a^2-1=8 \implies a=3,\ b=1.$$

故椭圆方程为

$$E:\frac{x^2}{9}+y^2=1.$$

2. 设

$$C\left(\frac{3(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\quad D\left(\frac{3(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2t_2}{1+t_2^2}\right).$$

由 $P(6,t),A(-3,0),B(3,0)$ 共线条件得：

$$k_{PA}=\frac{t}{9},\quad k_{PB}=\frac{t}{3} \implies 3k_{PA}=k_{PB}.$$

又

$$k_{PA}=k_{AC}=\frac{t_1}{3},\quad k_{PB}=k_{BD}=-\frac{1}{3t_2}.$$

代入得

$$3\cdot\frac{t_1}{3}=-\frac{1}{3t_2} \implies t_1t_2=-\frac{1}{3}.$$

3. 代入椭圆弦方程：

$$3y(t_1+t_2)-x(t_1t_2-1)=3(t_1t_2+1).$$

将 $t_1t_2=-1/3$ 代入，得

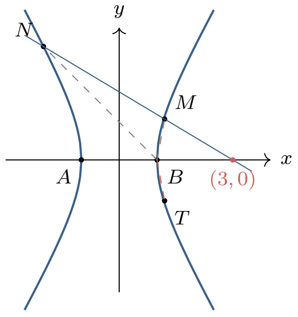
$$3y(t_1+t_2)-x\left(-\frac{4}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right) \implies 3y(t_1+t_2)+\frac{4}{3}x=2.$$

令 $y=0$，得 $x=3/2$。故直线 $CD$ 过定点 $(3/2,0)$。

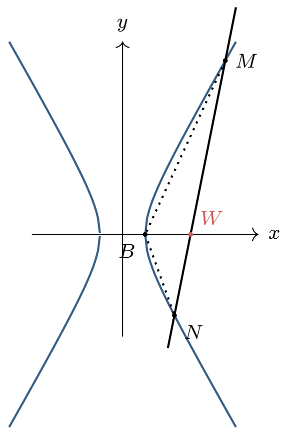
**例题 5：2025年福建省质检**

**题目：** $A(-1,0), B(1,0)$，$P$ 为 $AB$ 外动点，$PQ \perp AB$ 于 $Q$，满足 $|PQ|^2 = 3|AQ| \cdot |BQ|$，且 $Q$ 在线段外的轨迹 $C$。直线 $\ell$ 交 $C$ 于 $M, N$， $M$ 关于 $x$ 轴对称点 $T$。从以下条件选一证明：(i) $\ell$ 过定点 $(3,0)$；(ii) $\triangle BMN$ 不可能为锐角三角形。条件：① $k_{TB} + k_{NA} = 0$；② $k_{TB}k_{NB} = 6$；③ $k_{TB}/k_{NA} = 2$。

**解：**




原图




辅助图

**(1) 轨迹方程：** 设 $Q(x,0)$，则 $P(x,y)$。由 $|PQ|^2 = 3|AQ||BQ|$ 得 $y^2 = 3|x+1||x-1| = 3(x^2-1)$。轨迹 $C$: $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1\ (y \neq 0)$.

**(2) 证明与选条件：** **(i) 证 $\ell$ 过定点** $(3,0)$：设 $M(t_1), N(t_2)$。若 $\ell$ 过 $W(3,0)$，则

$$k_{MW} = k_{NW} \iff t_1t_2 = -\frac{1}{2}.$$

计算各斜率：

$$k_{TB} = -\frac{\sqrt{3}}{t_1}, \quad k_{NA} = \sqrt{3}t_2, \quad k_{NB} = \frac{\sqrt{3}}{t_2}, \quad k_{BM} = \frac{\sqrt{3}}{t_1}.$$

- 选 ②：

$$k_{TB}k_{NB} = 6 \implies \left(-\frac{\sqrt{3}}{t_1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{t_2}\right) = 6 \implies t_1t_2 = -\frac{1}{2}.$$

  结论成立。

- 选 ③ 同理成立。选 ① 推出 $t_1t_2 = 1$ 不成立。

故选 ② 或 ③，得 $t_1t_2 = -1/2 \implies \ell$ 过定点 $(3,0)$。

**(ii) 证 $\triangle BMN$ 为钝角：** 分两种情况： 1. $M,N$ 同支：不妨设 $M,N$ 均在右支，且 $M$ 在 $x$ 轴上方 ($t_1 \in (0,1)$)，$N$ 在 $x$ 轴下方 ($t_2 \in (-1,0)$)。计算斜率：$k_{BM} = \dfrac{\sqrt{3}}{t_1}$，$k_{BN} = \dfrac{\sqrt{3}}{t_2}$。

$$\tan\angle MBN = \frac{k_{BM} - k_{BN}}{1 + k_{BM}k_{BN}} = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)}{1 + \frac{3}{t_1t_2}}.$$

将 $t_1t_2 = -\dfrac{1}{2}$ 代入分母得 $1 - 6 = -5 < 0$；又 $t_1 > 0, t_2 < 0 \implies \dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_2} > 0$，故分子为正。所以 $\tan\angle MBN < 0$，即 $\angle MBN$ 为钝角。 2. $M,N$ 异支：不妨设 $M$ 在右支上方 ($t_1 \in (0,1)$)，$N$ 在左支。$\angle NMB$ 最大。利用双曲线两点式斜率 $k_{MN} = \dfrac{\sqrt{3}(t_1t_2+1)}{t_1+t_2}$。

$$\tan\angle NMB = \frac{k_{BM} - k_{MN}}{1 + k_{MN}k_{BM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{t_1} - \frac{\sqrt{3}(t_1t_2+1)}{t_1+t_2}}{1 + \frac{3(t_1t_2+1)}{t_1(t_1+t_2)}}.$$

将 $t_1t_2=-\dfrac{1}{2}$ 代入分子：

$$分子=\sqrt{3}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1/2}{t_1+t_2}\right)=\frac{\sqrt{3}(t_1+2t_2)}{2t_1(t_1+t_2)}.$$

代入分母：

$$分母=1+\frac{3/2}{t_1(t_1+t_2)}=\frac{2t_1^2+2t_1t_2+3}{2t_1(t_1+t_2)}=\frac{2t_1^2-1+3}{2t_1(t_1+t_2)}=\frac{2(t_1^2+1)}{2t_1(t_1+t_2)}.$$

两式相除得：

$$\tan\angle NMB=\frac{\sqrt{3}(t_1+2t_2)}{2(t_1^2+1)}.$$

因 $t_1+2t_2=\frac{t_1^2-1}{t_1}$，由 $M$ 在第一象限可得 $t_1\in(0,1)$，从而 $t_1^2-1<0$，因此 $\tan\angle NMB<0$。即 $\angle NMB$ 为钝角，$\triangle BMN$ 不可能为锐角三角形。

# 第二章　三角换元法：中档进阶篇

## 2.1　形式参数与切线方程

本章难度相比于基础篇有显著提升，知识点依旧不变，但会加强对知识点的运用！

### 2.1.1　形式参数的应用

**形式参数示例**

例如，设椭圆上一点 $A(2,3)$ 对应的参数为 $t_0$，椭圆：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 我们可设$A\left(\frac{4(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\frac{4\sqrt{3}t_0}{1+t_0^2}\right)$. 此时把 $A$ 点代入这个参数坐标中，可得 $t_0$ 的具体值：$t_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 这对于斜率还是两点式都有简化计算的作用。（双曲线同理！）

### 2.1.2　椭圆与双曲线的切线方程

**椭圆切线方程**

当点 $M(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上时，经过 $M$ 作椭圆的切线，则该切线方程为

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

### 2.1.3　两点式与取极限得到切线

**椭圆两点式的极限切线**

设椭圆参数式为$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right)$，　$B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right)$. 则弦 $AB$ 的**两点式**可写为$\ell_{AB}:\ ay(t_1+t_2)-bx(t_1t_2-1)=ab(t_1t_2+1)$. 不妨令 $t_1=t_2$（让 $AB$ 重合取极限），则：$\ell_{AB}:\ 2ayt_1-bx(t_1^2-1)=ab(t_1^2+1)$. 从而

$$\ell_{AB}:\ y=\frac{b(t_1^2-1)}{2at_1}x+\frac{b(t_1^2+1)}{2t_1}\qquad\text{(形式一)}.$$

又可等价写为

$$\frac{2t_1}{b(t_1^2+1)}y+\frac{1-t_1^2}{a(t_1^2+1)}x=1.$$

由此定坐标（切线点为 $A$）可得

$$\boxed{\ell_{AB}:\ \frac{yy_A}{b^2}+\frac{xx_A}{a^2}=1}\qquad\text{(形式二)}.$$

**注**：双曲线同理！齐次齐型利用"两点式"取极限即可！

## 2.2 中档题型演练

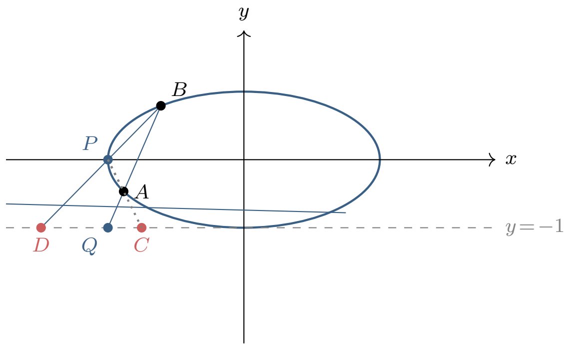
**例题 6：2023年全国奥林匹克竞赛预赛（吉林赛区）**

**题目：** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 经过点 $P(-2,0)$，且其焦距为 $2\sqrt{3}$。

(1) 求椭圆 $M$ 的方程；

(2) 如图，过点 $Q(-2,-1)$ 作直线 $\ell$ 与椭圆 $M$ 的下半部分相交于两个不同点 $A,B$，连接 $PA,PB$ 并延长，分别交直线 $y=-1$ 于 $C,D$ 两点，求证：$|QC|+|QD|-|QC|\cdot|QD|$ 为定值。

**解：**




(1) 由已知得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。

(2) 向右平移 $a$ 个单位（取 $a=2$），则 $Q(0,-1)$，$P(0,0)$。

可设

$$A\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}+2,\ \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right)=\left(\frac{4}{1+t_1^2},\ \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),$$

同理

$$B\left(\frac{4}{1+t_2^2},\ \frac{2t_2}{1+t_2^2}\right).$$

由 $k_{AQ}=k_{BQ}$ 得 $t_1+t_2=-2$。又

$$k_{AP}=\frac{t_1}{2},\qquad k_{BP}=\frac{t_2}{2}.$$

因此

$$\ell_{AP}:\ y=\frac{t_1}{2}x,\qquad \ell_{BP}:\ y=\frac{t_2}{2}x.$$

与 $y=-1$ 交点满足

$$x_C=-\frac{2}{t_1},\qquad x_D=-\frac{2}{t_2}.$$

从而

$$\frac{1}{|QC|}+\frac{1}{|QD|}=\frac{1}{|x_C|}+\frac{1}{|x_D|}=\left|-\frac{t_1+t_2}{2}\right|=1,$$

故

$$|QD|+|QC|-|QC|\cdot|QD|=0.$$

或直接代入：

$$|QC|+|QD|-|QC|\cdot|QD|=|x_C|+|x_D|-|x_Cx_D|=\left|\frac{-2(t_1+t_2)}{t_1t_2}\right|-\left|\frac{4}{t_1t_2}\right|=0.$$

故 $|QC|+|QD|-|QC|\cdot|QD|=0$ 为定值。

**技巧点拨**

**备注：**其实也可以不平移，正常设

$$A\left(\frac{2(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

来操作！平移前后斜率、弦长均保持不变！

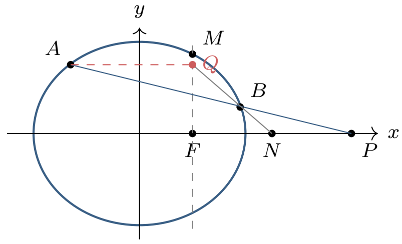
**例题 7：2024年全国甲卷**

**题目：** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 $F$，点 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在 $C$ 上，且 $MF\perp x$ 轴。

(1) 求椭圆 $C$ 的方程；

(2) 过点 $P(4,0)$ 的直线交 $C$ 于 $A,B$ 两点，$N$ 为线段 $FP$ 的中点，直线 $NB$ 交直线 $MF$ 于点 $Q$，证明：$AQ\perp y$ 轴。

**解：**




(1) 由已知得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

(2) 设

$$A\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right),\quad F(1,0).$$

由题意 $N\left(\dfrac{5}{2},0\right)$。

弦 $AB$ 的两点式：

$$\ell_{AB}:\ \sqrt{3}\,x(1-t_1t_2)+2y(t_1+t_2)=2\sqrt{3}(1+t_1t_2).$$

代入 $P(4,0)$，得 $t_1t_2=\dfrac{1}{3}$，从而 $t_2=\dfrac{1}{3t_1}$。

此时 $B$ 点坐标可改写为

$$B\left(\frac{2(9t_1^2-1)}{9t_1^2+1},\ \frac{6\sqrt{3}\,t_1}{9t_1^2+1}\right).$$

计算斜率：

$$k_{NB}=\frac{\dfrac{6\sqrt{3}\,t_1}{9t_1^2+1}}{\dfrac{2(9t_1^2-1)}{9t_1^2+1}-\dfrac{5}{2}}=\frac{12\sqrt{3}\,t_1}{-9(1+t_1^2)}.$$

故

$$\ell_{NB}:\ y=\frac{12\sqrt{3}\,t_1}{-9(1+t_1^2)}\left(x-\frac{5}{2}\right).$$

易知 $x_Q=1$，代入解得

$$y_Q=\frac{12\sqrt{3}\,t_1}{-9(1+t_1^2)}\left(1-\frac{5}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}=y_A.$$

即 $AQ\perp y$ 轴。

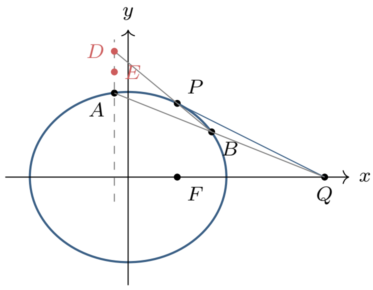
**例题 8：2019年全品学练考高中数学人教A版选修2-1**

**题目**：已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 $F$，过点 $F$ 作 $x$ 轴的垂线交椭圆 $\Gamma$ 于点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，过点 $P$ 作椭圆 $\Gamma$ 的切线，交 $x$ 轴于点 $Q$。

(1) 求点 $Q$ 的坐标；

(2) 过点 $Q$ 的直线（非 $x$ 轴）交椭圆 $\Gamma$ 于 $A,B$ 两点，过点 $A$ 作 $x$ 轴的垂线与直线 $BP$ 交于点 $D$，求证：线段 $AD$ 的中点在定直线上。

**解**：




(1) 由题意得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

设

$$P\left(\frac{2(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_0}{1+t_0^2}\right),\quad M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$

其中 $t_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

弦 $MN$ 的两点式：

$$\ell_{MN}:\ 2y(t_1+t_2)-\sqrt{3}\,x(t_1t_2-1)=2\sqrt{3}(t_1t_2+1).$$

若让 $MN$ 重合则为切线方程，令 $t_0=t_1=t_2$，得

$$\ell_{t_0}:\ 4yt_0-\sqrt{3}\,x(t_0^2-1)=2\sqrt{3}(t_0^2+1).$$

令 $y=0$，得 $x=4$，故 $Q(4,0)$。

(2) 再设

$$A\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right),\quad P\left(\frac{2(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_0}{1+t_0^2}\right),\ t_0=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

且 $Q(4,0)$。

由 $k_{AQ}=k_{BQ}$，得 $t_1t_2=\dfrac{1}{3}$。

直线 $BP$ 的方程：

$$\ell_{BP}:\ 2y\left(t_2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-x(t_2-\sqrt{3})=2(t_2+\sqrt{3}).$$

令 $x=x_A$（即 $A$ 的横坐标），得

$$y_D=-\frac{6\left(t_2+\sqrt{3}\,t_1^2\right)}{3t_2+\sqrt{3}+t_1+\sqrt{3}t_1^2}.$$

取 $AD$ 中点为 $E$，则

$$\begin{aligned}
y_E = \frac{y_D + y_A}{2} &= \frac{\frac{1}{t_1} + 3\sqrt{3}\,t_1^2}{\frac{1}{t_1} + \sqrt{3} + t_1 + \sqrt{3}t_1^2} + \frac{\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2} \\
&= \frac{1 + 3\sqrt{3}\,t_1^3}{(1+t_1^2)(\sqrt{3}t_1+1)} + \frac{\sqrt{3}t_1}{1+t_1^2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}\,t_1^3 + 3t_1^2 + \sqrt{3}t_1 + 1}{(1+t_1^2)(\sqrt{3}t_1+1)} = \frac{(3t_1^2+1)(\sqrt{3}t_1+1)}{(1+t_1^2)(\sqrt{3}t_1+1)} \\
&= \frac{3t_1^2+1}{1+t_1^2}.
\end{aligned}$$

又 $x_E = x_A = \dfrac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}$，故

$$x = \frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2} \Rightarrow t_1^2 = \frac{2-x}{x+2} \quad \text{带入} \quad y = \frac{3t_1^2+1}{1+t_1^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

故定直线为：$y = -\dfrac{1}{2}x + 2$。

**例题 9：2026届南京七校联考**

**题目：** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 $M$、$N$，且椭圆 $C$ 过点 $\left(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

(1) 求椭圆 $C$ 的方程；

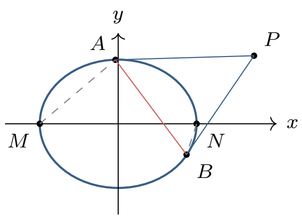
(2) 已知椭圆 $C$ 具有性质：椭圆 $C$ 上任一点 $T(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，试运用该性质解决以下问题：过动点 $P(3,m)$ 作椭圆 $C$ 的两条切线，切点分别为 $A$、$B$，$A$ 在 $x$ 轴上方。

(i) 设直线 $AM$ 与直线 $BN$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，求证：$\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值；

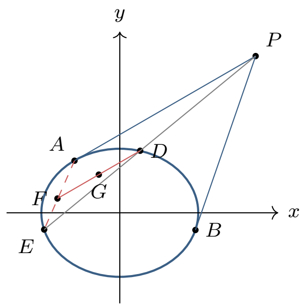
(ii) 若 $m=2\sqrt{3}$，过点 $P$ 作直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于 $D$，$E$ 两点，过 $D$ 作 $PA$ 的平行线交 $AB$ 于点 $G$，延长 $DG$ 至点 $F$，使得 $DG=GF$。求证：$A$、$E$、$F$ 三点共线。

---

**解：**




第二问题图




第三问题图

(1) 由已知得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$。

(2) 直线 $AB$：

$$\ell_{AB}:\ x+\frac{my}{2}=1.$$

令 $y=0$，得 $x=1$，过 $K(1,0)$。

设

$$A\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{2}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{2}\,t_2}{1+t_2^2}\right).$$

记左右顶点 $M(-\sqrt{3},0)$，$N(\sqrt{3},0)$。

由 $k_{KA}=k_{KB}$ 得：

$$t_1t_2=-(2-\sqrt{3}).$$

且：

$$\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=-t_1t_2=2-\sqrt{3}.$$

(3) 由题意 $m=2\sqrt{3}$，故

$$\ell_{AB}:\ x+\sqrt{3}y=1.$$

可设

$$A\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\ \frac{2\sqrt{2}\,t_0}{1+t_0^2}\right)=\left(-1,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

以及

$$D\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_1^2)}{1+t_1^2}, \frac{2\sqrt{2}\,t_1}{1+t_1^2}\right), \quad E\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_2^2)}{1+t_2^2}, \frac{2\sqrt{2}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$

其中

$$t_0=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

联立直线

$$\ell_{DF}:\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x_D)+y_D, \qquad \ell_{AB}:\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}},$$

得

$$x_G=\frac{t_1^2(\sqrt{3}-3)-6\sqrt{2}\,t_1+3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(1+t_1^2)}.$$

由 $|GD|=|GF|$，$G$ 为 $DF$ 的中点，故

$$x_F=2x_G-x_D=\frac{t_1^2-2\sqrt{6}\,t_1+1}{1+t_1^2}, \qquad y_F=\frac{t_1^2(1+\sqrt{3})+1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+t_1^2)}.$$

计算斜率：

$$k_{AE}=\frac{\sqrt{2}(t_2t_0-1)}{\sqrt{3}(t_2+t_0)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)t_2-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)+\sqrt{2}t_2},$$

以及

$$k_{AF}=\frac{t_1^2(1-\sqrt{3})+1+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}t_1^2+6\sqrt{2}t_1-2\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\left(t_1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)}{2\sqrt{3}\left(t_1-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

要证 $k_{AE}=k_{AF}$ 等价于

$$\frac{2(t_1+t_2)+t_1t_2(\sqrt{6}-\sqrt{2})+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{-4(t_1+t_2)+2t_1t_2(\sqrt{6}+\sqrt{2})+2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=1 \quad (①).$$

又由 $k_{DP}=k_{EP}$ 得：

$$6(t_1+t_2)=t_1t_2(\sqrt{6}+3\sqrt{2})+\sqrt{6}-3\sqrt{2} \quad (②).$$

把 (②) 代入 (①) 式中，显然成立，故 $A, F, E$ 共线。

**例题 10：2025年武汉二月调研**

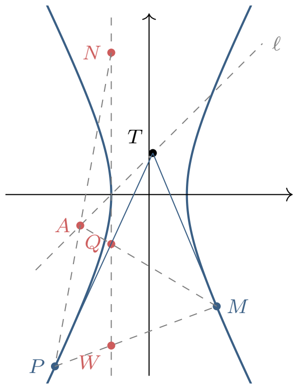
**题目**：双曲线 $E: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的一个顶点在直线 $\ell: y=x+1$ 上，且其离心率为 $\sqrt{5}$。

(1) 求双曲线 $E$ 的标准方程；

(2) 若一条直线与双曲线恰有一个公共点，且该直线与双曲线的渐近线不平行，则定义该直线为双曲线的切线，定义该公共点为切线的切点。已知点 $T$ 在直线 $\ell$ 上，且过点 $T$ 恰好可作双曲线 $E$ 的两条切线，设这两条切线的切点分别为 $P$ 和 $M$。设直线 $TP$ 和直线 $TM$ 分别与直线 $x=-1$ 交于点 $Q$ 和点 $N$，证明：直线 $PN$ 和直线 $MQ$ 的交点在定直线上。

**附**：双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 以点 $(m,n)$ 为切点的切线方程为 $\dfrac{m}{a^2}x-\dfrac{n}{b^2}y=1$。

**解**：




(1) $E: x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$。

(2) 设切点参数

$$P\left(\frac{1+t_1^2}{1-t_1^2},\ \frac{4t_1}{1-t_1^2}\right),\qquad M\left(\frac{1+t_2^2}{1-t_2^2},\ \frac{4t_2}{1-t_2^2}\right).$$

由切线定义，切点弦 $PM$ 方程为 $x_T x-\dfrac{y_T y}{4}=1$。又 $y_T=x_T+1$，代入整理得 $x_T(4x-y)-(y+4)=0$，可知弦 $PM$ 过定点 $W(-1,-4)$。

又由弦方程可知：$\ell_{PM}: 2x(1+t_1t_2)-y(t_1+t_2)=2(1-t_1t_2)$, 代入点 $W(-1,-4)$ 得 $-2(1+t_1t_2)+4(t_1+t_2)=2(1-t_1t_2)$，化简得 $t_1+t_2=1$。由切线方程：

$$\ell_{PT}: (1+t_1^2)x-t_1y=1-t_1^2,\qquad \ell_{TM}: (1+t_2^2)x-t_2y=1-t_2^2.$$

令 $x=-1$，得

$$Q\left(-1,\ -\frac{2}{t_1}\right),\qquad N\left(-1,\ -\frac{2}{t_2}\right).$$

由于 $P,N$ 坐标已知，可得直线方程：

$$\begin{aligned}\ell_{PN}&: (t_1^2-2t_1t_2-1)x+t_2y=-t_1^2+2t_1t_2-1 &&(①)\\ \ell_{MQ}&: (t_2^2-2t_1t_2-1)x+t_1y=-t_2^2+2t_1t_2-1 &&(②)\end{aligned}$$

由 (①)−(②)，得

$$(t_1^2-t_2^2)x+(t_2-t_1)y=-(t_1^2-t_2^2).$$

两边约去 $(t_1-t_2)$ 并代入 $t_1+t_2=1$，整理得$x-y+1=0$ 从而 $\ell_{PN}$ 与 $\ell_{MQ}$ 交点在定直线 $y=x+1$ 上。

**例题 11：2025年长沙适应性考试**

**题目**：已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左顶点为 $A$，焦距为 $2\sqrt{3}$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

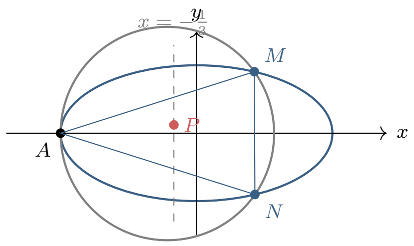
(1) 求椭圆 $C$ 的方程；

(2) 直线 $\ell$ 与椭圆 $C$ 交于 $M,N$ 两点，点 $P$ 为 $\triangle AMN$ 的外心。

(i) 若 $\triangle AMN$ 为等边三角形，求点 $P$ 的坐标；

(ii) 若点 $P$ 在直线 $x=-\dfrac{1}{3}$ 上，求点 $A$ 到直线 $\ell$ 的距离的取值范围。

**解**：




(1) 由已知得椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。

(2) (i) 可设

$$M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),\qquad A(-2,0).$$

由椭圆的对称性：

$$k_{AM}=\frac{t_1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ t_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ M\left(-\frac{2}{7},\ \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

同理

$$N\left(-\frac{2}{7},\ -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

由外心性质

$$x_P=\frac{x_M+x_N+x_A}{3}=-\frac{6}{7},\qquad y_P=\frac{y_M+y_N+y_A}{3}=0,$$

故 $P\left(-\dfrac{6}{7},0\right)$。

(ii) 设 $P\left(-\dfrac{1}{3},\ y_p\right)$。

由题意 $|AP|=|PM|$，列式：

$$\sqrt{\left(2-\frac{1}{3}\right)^2+y_p^2}=\sqrt{\left[\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}+\frac{1}{3}\right]^2+\left[\frac{2t_1}{1+t_1^2}-y_p\right]^2}.$$

可得：

$$y_p=\frac{2-7t_1^2}{3t_1(1+t_1^2)}.$$

同理

$$y_p=\frac{2-7t_2^2}{3t_2(1+t_2^2)}.$$

联立可得：

$$7t_1^2t_2^2-9t_1t_2-2(t_1^2+t_2^2)-2=0.$$

当 $t_1t_2>0$ 时：

$$7(t_1t_2)^2-13t_1t_2-2\geq 0 \ \Rightarrow\ (7t_1t_2+1)(t_1t_2-2)\geq 0,$$

故 $t_1t_2\geq 2$。当且仅当 $t_1=t_2$ 时等号成立，此时 $M$ 与 $N$ 重合，故两点不同则 $t_1t_2>2$。

当 $t_1t_2<0$ 时：

$$7(t_1t_2)^2-5t_1t_2-2\geq 0 \ \Rightarrow\ (7t_1t_2+2)(t_1t_2-1)\geq 0,$$

故 $t_1t_2\leq -\dfrac{2}{7}$。当且仅当 $t_1=-t_2$ 时等号成立。

综上：

$$t_1t_2\in(-\infty,-\tfrac{2}{7}]\cup(2,+\infty), \qquad \text{且由 } y_p=y_p\Rightarrow 4(t_1+t_2)^2=2\big(7t_1^2t_2^2-5t_1t_2-2\big).$$

直线 $MN$ 的两点式：

$$\ell_{MN}:\ 2y(t_1+t_2)-x(t_1t_2-1)=2(t_1t_2+1).$$

则点 $A$ 到直线 $\ell_{MN}$ 的距离：

$$\begin{aligned} d_{A\to\ell_{MN}}&=\frac{\big|\,2(1-t_1t_2)+2(t_1t_2+1)\,\big|}{\sqrt{(1-t_1t_2)^2+4(t_1+t_2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{15t_1^2t_2^2-12t_1t_2-3}}\\ &=\frac{4}{\sqrt{15\left(t_1t_2-\frac{6}{15}\right)^2-\frac{27}{5}}}\leq\frac{28}{9}. \end{aligned}$$

当且仅当 $t_1t_2=-\dfrac{2}{7}$ 时等号成立。

综上：$d_{A\to\ell_{MN}}\in\left(0,\dfrac{28}{9}\right]$。

**技巧点拨**

其实除了利用 $|AP|=|PM|$ 以及 $|AP|=|PN|$，还可利用 $\ell_{AM}$ 与 $\ell_{AN}$ 的垂直平分线过 $P$ 点，以及：

1. 当 $t_1t_2>0$ 时，$t_1^2+t_2^2\geq 2t_1t_2$；
2. 当 $t_1t_2<0$ 时，$t_1^2+t_2^2\geq -2t_1t_2$。

# 第三章　统一变量与参数范围

## 3.1　统一变量

### 统一变量方法

在上一章中有利用到统一变量的思想，不知读者是否有所印象。

**● 椭圆情形**

对于椭圆上 $A,B$ 两点：

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right).$$

可以看出，有两个变量 $t_1$ 与 $t_2$。若直线 $AB$ 过 $T(x_0,0)$，则代入两点式可得

$$t_1t_2=\frac{x_0-a}{x_0+a}.$$

此时就有了 $t_1$ 与 $t_2$ 的关系。同样，对于不同题型，尝试找到变量之间的关系即可！

还是以刚刚过 $T(x_0,0)$ 为例：

$$t_1t_2=\frac{x_0-a}{x_0+a}\quad\Rightarrow\quad t_1=\frac{x_0-a}{(x_0+a)t_2}.$$

代入 $A$ 点坐标，可写成（变量统一）：

$$A\left(a\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2},\frac{2bxy}{y^2+x^2}\right),\qquad \begin{cases}x=x_0-a,\\ y=(x_0+a)t_2.\end{cases}$$

至此便完成了坐标之间的变量统一！

**● 双曲线情形**

同样地，对于双曲线也可以得

$$A\left(a\frac{y^2+x^2}{y^2-x^2},\frac{2bxy}{y^2-x^2}\right).$$

注意：双曲线的 $x,y$ 由两点式代入 $T(x_0,0)$，请勿再搞混双曲线与椭圆的 $x,y$。总的来说，思路完全一样！

**注意**

该方法的确通用、万能，但有时并不是最优解（计算量过大）！

## 3.2　$t$ 的范围问题

### 参数 $t$ 的范围问题

想必在第一章中最后一题有人不理解为什么 $t_1\in(0,1)$，$t_2\in(-1,0)$。我们现在来简单讨论：

**● 椭圆**

在椭圆中：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad A\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\frac{2bt}{1+t^2}\right),$$

其中 $t$ 在控制 $A$ 点的位置。

例如 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时 $A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

$A$ 点常常为动点。那为什么 $t$ 不是确定？此时便有了 $t$ 在椭圆上的运动图。

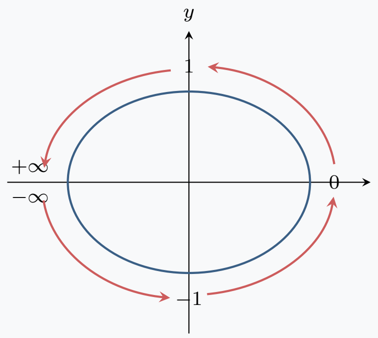
也易推得，若 $A$ 在第一象限：$x_A > 0,\ y_A > 0$，解得 $t \in (0,1)$。别的象限同理。

● **双曲线**

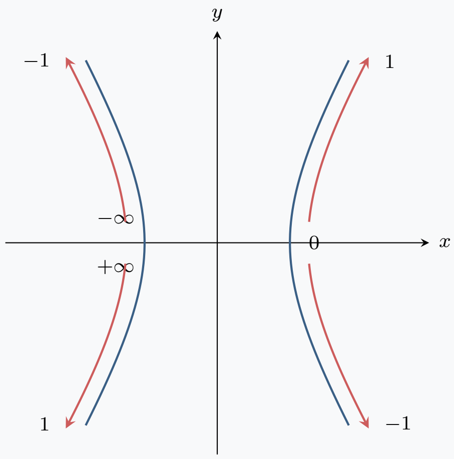
而在双曲线中：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

也有相应的运动图。推导思路一样。




椭圆 $t$ 值分布




双曲线 $t$ 值分布

现在若回到那道题 $M$ 在 $x$ 轴上方且 $M$ 在右支上，由此图可知 $t \in (0,1)$，一眼便知！

**用处**

此知识点在面对 $t$ 的取值问题、求范围问题都会涉及，也是让三角换元走向严谨的重要一步！

## 3.3 综合应用例题

**例题 12：2025年高考核动力高中数学全册课标版**

**题目：** 我们约定，如果一个椭圆的长轴和短轴分别是另一条双曲线的实轴和虚轴，则称它们互为"姊妹"圆锥曲线。已知椭圆

$$C_1:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<2),$$

双曲线 $C_2$ 是椭圆 $C_1$ 的"姊妹"圆锥曲线，$e_1,e_2$ 分别为 $C_1,C_2$ 的离心率，且 $e_1e_2=\frac{\sqrt{15}}{4}$，点 $M,N$ 分别为椭圆 $C_1$ 的左、右顶点。

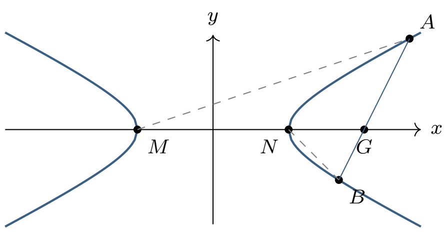
(1) 求双曲线 $C_2$ 的方程；

(2) 设过点 $G(4,0)$ 的动直线 $l$ 交双曲线 $C_2$ 右支于 $A,B$ 两点，若直线 $AM$、$BN$ 的斜率分别为 $k_{AM},k_{BN}$。

(i) 试探究 $\dfrac{k_{AM}}{k_{BN}}$ 是否为定值；

(ii) 求 $w=k_{AM}^2+\dfrac{2}{3}k_{BN}$ 的取值范围。

**解：**




(1) 由"姊妹"关系可知 $C_2$ 的实轴为 $2a=4$（即 $a=2$），虚轴为 $2b$。椭圆 $C_1$ 的离心率

$$e_1=\sqrt{1-\frac{b^2}{4}},$$

双曲线

$$C_2:\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

的离心率

$$e_2=\sqrt{1+\frac{b^2}{4}}.$$

于是

$$e_1e_2=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{4}\right)\left(1+\frac{b^2}{4}\right)}=\sqrt{1-\frac{b^4}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

两边平方得 $1-\dfrac{b^4}{16}=\dfrac{15}{16}$，故 $b^4=1$，结合 $b>0$ 得 $b=1$。因此

$$C_2:\ \frac{x^2}{4}-y^2=1.$$

(2) 设

$$A\left(\frac{2(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\frac{2t_1}{1-t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{2(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\frac{2t_2}{1-t_2^2}\right),$$

且

$$M(-2,0),\quad N(2,0),\quad G(4,0).$$

有

$$k_{AM}=\frac{t_1}{2},\qquad k_{BN}=\frac{1}{2t_2}.$$

由 $k_{AG}=k_{BG}$ 可得

$$t_1t_2=-\frac{1}{3}.$$

(i)

$$\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=t_1t_2=-\frac{1}{3},$$

为定值。

(ii) 由题（$1-t_1^2>0$，$1-t_2^2>0$）得 $t_1,t_2\in(-1,1)$，从而

$$k_{AM}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\qquad k_{BN}\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right).$$

又由 $t_1t_2=-\dfrac{1}{3}$ 得

$$k_{BN}=-3k_{AM}\ \Rightarrow\ k_{AM}\in\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{6},+\infty\right).$$

综合可得

$$k_{AM}\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right).$$

并且

$$w=k_{AM}^2+\frac{2}{3}k_{BN}=k_{AM}^2-2k_{AM}.$$

故

$$w\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{11}{36}\right)\cup\left(\frac{13}{36},\frac{5}{4}\right).$$

**例题 13：2024年江苏镇江高二期末**

**题目：**（本小题满分 17 分）[江苏镇江 2024 高二期中]

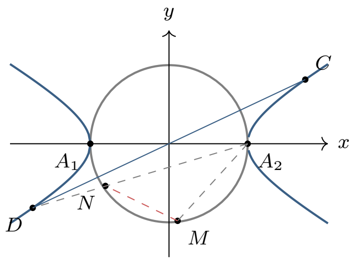
已知双曲线

$$E:\ \frac{x^2}{3}-y^2=1$$

的左、右顶点分别为 $A_1,A_2$。

过原点的直线与双曲线 $E$ 相交于 $C,D$ 两点（$C$ 在 $x$ 轴的上方），直线 $A_2C$、$A_2D$ 与圆 $x^2+y^2=3$ 分别交于点 $M,N$，直线 $CD$ 与直线 $MN$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，求 $k_1+k_2$ 的值。

**解：**




设

$$C\left(\frac{\sqrt{3}(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\frac{2t_1}{1-t_1^2}\right),\qquad D\left(-\frac{\sqrt{3}(1+t_1^2)}{1-t_1^2},-\frac{2t_1}{1-t_1^2}\right),$$

$$N\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2\sqrt{3}t_2}{1+t_2^2}\right),\qquad M\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{2\sqrt{3}t_3}{1+t_3^2}\right),\qquad A_2(\sqrt{3},0).$$

由 $A_2,N,D$ 三点共线（$k_{A_2N}=k_{A_2D}$）得

$$t_2=-\frac{\sqrt{3}}{t_1}.$$

同理 $A_2,M,C$ 共线得

$$t_3=-\sqrt{3}\,t_1.$$

则

$$N\left(\frac{\sqrt{3}(t_1^2-3)}{t_1^2+3},-\frac{6t_1}{t_1^2+3}\right),\qquad M\left(\frac{\sqrt{3}(1-3t_1^2)}{1+3t_1^2},-\frac{6t_1}{1+3t_1^2}\right).$$

此时

$$k_{CD}=\frac{2t_1}{\sqrt{3}(1+t_1^2)},\qquad k_{NM}=-\frac{2t_1}{\sqrt{3}(1+t_1^2)}.$$

故

$$k_1+k_2=k_{CD}+k_{NM}=0.$$

**例题 14：第一届圆梦杯**

**题目：**（12 分）

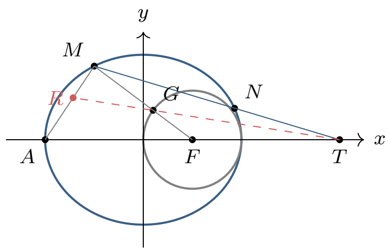
已知椭圆

$$C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

的左顶点为 $A$，右焦点为 $F$，过点 $T(4,0)$ 的直线 $l$ 交 $C$ 于 $M,N$ 两点，其中 $M$ 在第二象限。

设线段 $MF$ 交半径为 1 的圆 $\odot F$ 于点 $G$，直线 $TG$ 与 $AM$ 交于点 $R$，若直线 $AM,NR$ 的斜率之比为 $-23:1$，求 $|MG|$。

**解：**




设

$$M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$

$$F(1,0),\qquad A(-2,0).$$

则

$$k_{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}t_1.$$

圆 $\odot F$：

$$(x-1)^2+y^2=1$$

可设

$$G(\cos\theta+1,\sin\theta)=\left(\frac{2}{1+t_3^2},\frac{2t_3}{1+t_3^2}\right).$$

三点共线（$k_{MF}=k_{GF}$）得

$$3t_3t_1^2+t_1(-\sqrt{3}t_3^2+\sqrt{3})-t_3=0,$$

化简为

$$(\sqrt{3}\,t_1-t_3)(\sqrt{3}\,t_1t_3+1)=0.$$

由题意 $M$ 在第二象限可得 $t_1>1$,$G$在第一象限,则$t_3$大于0,且 $\sqrt{3}\,t_1t_3+1\neq 0$，故

$$\sqrt{3}\,t_1-t_3=0\ \Rightarrow\ t_3=\sqrt{3}\,t_1.$$

于是

$$G\left(\frac{2}{1+3t_1^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+3t_1^2}\right),\qquad k_{TG}=-\frac{\sqrt{3}\,t_1}{1+6t_1^2}.$$

两直线

$$l_{AM}:\ y=\frac{\sqrt{3}\,t_1}{2}(x+2),\qquad l_{TG}:\ y=-\frac{\sqrt{3}\,t_1}{1+6t_1^2}(x-4)$$

交于

$$R\left(\frac{2-4t_1^2}{1+2t_1^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+2t_1^2}\right).$$

又弦 $MN$ 的方程（以 $t_1, t_2$ 表示）为

$$l_{MN}:\ 2y(t_1+t_2)-\sqrt{3}\,x(t_1t_2-1)=2\sqrt{3}\,(t_1t_2+1),$$

且其过点 $(4,0)$，故

$$t_1t_2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ t_2=\frac{1}{3t_1}.$$

引入统一变量（取 $x=1,\ y=3t_1$）：

$$N\left(\frac{2(y^2-x^2)}{y^2+x^2},\frac{2\sqrt{3}\,xy}{y^2+x^2}\right)=\left(\frac{2(9t_1^2-1)}{9t_1^2+1},\frac{6\sqrt{3}\,t_1}{9t_1^2+1}\right).$$

此时

$$k_{NR}=\frac{2\sqrt{3}\,t_1-3\sqrt{3}\,t_1^3}{36t_1^4-2}.$$

由题意"斜率之比为 $-23:1$"（即 $k_{AM}=-23k_{NR}$）可化为

$$6t_1^4-23t_1^2+15=0,$$

解得

$$t_1^2=3\quad 或\quad t_1^2=\frac{5}{6}\ (舍，不在\ t_1\ 范围).$$

故 $t_1=\sqrt{3}$，从而

$$M\left(-1,\frac{3}{2}\right).$$

于是

$$|MF|=\sqrt{(1-(-1))^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}.$$

由于 $G$ 为线段 $MF$ 与半径为 1 的圆 $\odot F$ 的交点，

$$|MG|=|MF|-1=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}.$$

# 第四章　定点问题与对比系数法

## 4.1　圆锥曲线定点问题的常见出题方式

在圆锥曲线定点问题中，通常情况下，有两种出题方式：

1. 围绕轴点、非轴点构成的约束直线，最后求曲线上一条弦过定点。
2. 可能还会有轴点、非轴点，甚至给定特殊的直线等情况；最后求”一点在曲线上，一点在直线上”或其他组合，完全不满足”两点均在曲线上”。

## 4.2　两类问题的思路与示例

### 4.2.1　两类思路

**技巧点拨**

**解题思路：**

- **第一种情况：**利用两点式得到 $t$ 之间的关系，再带入两点式中即可
- **第二种情况：**无脑通法——统一变量，再利用斜率相同即可

### 4.2.2　示例：先猜定点在坐标轴上

$$C\Big(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{5}\,t_2}{1+t_2^2}\Big),\qquad D\Big(\frac{9-5t_2^2}{9+5t_2^2},\ \frac{6\sqrt{5}\,t_2}{9+5t_2^2}\Big).$$

易猜 $l_{CD}$ 过 $G(x_0,0)$。由斜率相等 $k_{CG}=k_{DG}$ 得

$$\frac{2\sqrt{5}\,t_2}{2-2t_2^2-x_0(1+t_2^2)}=\frac{6\sqrt{5}\,t_2}{9-5t_2^2-x_0(9+5t_2^2)}.$$

**计算验证（化简因式）**

对上式交叉相乘并约去公共因子，可化为

$$(t_2^2+3)(2x_0-1)=0.$$

由于 $t_2$ 为变量，故只能取 $2x_0-1=0$，得到

$$x_0=\frac{1}{2},\qquad G\Big(\frac{1}{2},0\Big).$$

### 4.2.3　若看不出定点：设一般点 $(x_0,y_0)$

若看不出来定点，我们可设定点 $G(x_0,y_0)$。由 $k_{CG}=k_{DG}$ 得

$$\frac{2\sqrt{5}\,t_2-y_0(1+t_2^2)}{2-2t_2^2-x_0(1+t_2^2)}=\frac{6\sqrt{5}\,t_2-y_0(9+5t_2^2)}{9-5t_2^2-x_0(9+5t_2^2)}.$$

**对比系数思想**

对比 $t_2^2$ 项系数可得：
$$\frac{-y_0}{-2-x_0}=\frac{-5y_0}{-5-5x_0}\implies y_0=0.$$
同理对比常数项也推出 $y_0=0$。但对比 $t_2$ 项会出现
$$\frac{2\sqrt{5}}{0}=\frac{6\sqrt{5}}{0},$$
显然无法对比，因此此时应回到 $G(x_0,0)$ 的情形再按上节方法处理。如果直线过非轴点，可由$t_2$平方项系数、$t_2$项系数、常数项构成三连恒等式，来求解$x_0$、$y_0$即可

## 4.3 对比系数原理

**对比系数原理**

对于 $\forall t_2$，若恒有
$$\frac{mt_2-5}{nt_2-7}=k\quad(k\text{ 为定值}),$$
则
$$mt_2-5=k(nt_2-7)\implies t_2(m-kn)=5-7k.$$
因为 $t_2$ 为任意值时该等式恒成立，所以必须
$$m-kn=0,\qquad 5-7k=0\implies\frac{m}{n}=k=\frac{5}{7}.$$
同样地，对于
$$\frac{at_2^2+bt_2+c}{dt_2^2+et_2+f}=\frac{gt_2^2+ht_2+i}{jt_2^2+kt_2+l},$$
对比各次幂的系数：
$t_2^2$ 的系数：$\dfrac{a}{d}=\dfrac{g}{j}$
$t_2$ 的系数：$\dfrac{b}{e}=\dfrac{h}{k}$
常数：$\dfrac{c}{f}=\dfrac{i}{l}$

## 4.4 综合例题演练

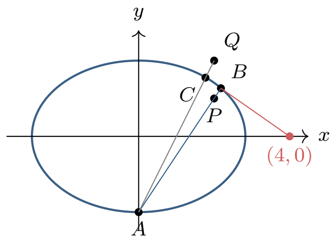
**例题 15：网络原创试题**

**题目：**已知椭圆

$$\Gamma:\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,$$

过点 $P(2,1)$ 的直线 $l$ 与椭圆 $\Gamma$ 相交于 $A,B$ 两点。点 $Q(2,2)$，直线 $QA$ 与椭圆 $\Gamma$ 的另一个交点为 $C$。证明：直线 $BC$ 过定点。

**证明：**




对椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，取参数

$$A\Big(\frac{2\sqrt{2}(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{4t_1}{1+t_1^2}\Big),\quad B\Big(\frac{2\sqrt{2}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{4t_2}{1+t_2^2}\Big),\quad C\Big(\frac{2\sqrt{2}(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\ \frac{4t_3}{1+t_3^2}\Big).$$

两点参数弦 $l_{AB}$ 可写为

$$l_{AB}:\ 2\sqrt{2}\,y(t_1+t_2)-2x(t_1t_2-1)=4\sqrt{2}\,(t_1t_2+1).$$

又因 $P(2,1)\in l_{AB}$，代入整理得

$$t_1\big[\sqrt{2}-2(\sqrt{2}+1)t_2\big]=2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}\,t_2. \tag{1}$$

同理，$Q(2,2)\in l_{AC}$，可得

$$t_1\big[\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)t_3\big]=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\,t_3. \tag{2}$$

由(1)解出 $t_1$ 并代入(2)，可推出

$$t_2t_3=3-2\sqrt{2}. \tag{3}$$

弦 $BC$ 的方程同型为

$$l_{BC}:\ 2\sqrt{2}\,y(t_2+t_3)-2x(t_2t_3-1)=4\sqrt{2}\,(t_2t_3+1).$$

令 $(x,y)=(4,0)$ 代入，有

$$-8(t_2t_3-1)=4\sqrt{2}\,(t_2t_3+1),$$

解得 $t_2t_3=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$，与(3)一致，故

$$(4,0)\in BC,$$

即直线 $BC$ 过定点 $(4,0)$。

**例题 16：2024年深圳高二调研**

**题目：** 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，直线 $l: y=kx+1$ 过点 $M(1,\frac{1}{2})$，且与椭圆 $E$ 相交于 $P,Q$ 两点， $M$ 是线段 $PQ$ 的中点，$O$ 为坐标原点。

(1) 求椭圆 $E$ 的方程；

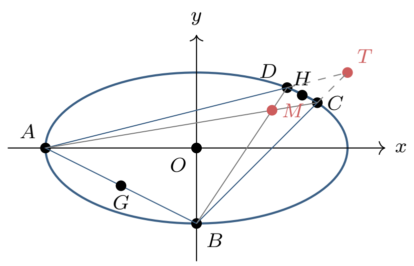
(2) 若梯形 $ABCD$ 的顶点都在椭圆 $E$ 上，且 $AB \parallel CD$，对角线 $AC$ 和 $BD$ 交于点 $M$，线段 $AB,CD$ 的中点分别为 $G,H$。

(i) 证明：$G,H,O,M$ 四点共线；

(ii) 探究直线 $AD$ 与直线 $BC$ 的交点是否为定点；若是，求出该定点并证明；若不是，说明理由。

---

**解：**




(1) 曲线方程

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

(2) (i) **共线证明**

由 $AB \parallel CD$，设 $\vec{BM}=\lambda\vec{MD}$，$\vec{AM}=\lambda\vec{MC}$。

则有：

$$\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MG}=-\lambda(\vec{MD}+\vec{MC})=-2\lambda\vec{MH} \implies M,G,H \text{ 共线}$$

又由椭圆“第三定义”：

$$k_{AB}\cdot k_{OG}=-\frac{1}{4},\quad k_{CD}\cdot k_{OH}=-\frac{1}{4} \implies O,G,H \text{ 共线}$$

综上所述：$G,H,O,M$ 四点共线。

(ii) **定点求解**

先设点坐标（参数化）：

$$A\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2t_2}{1+t_2^2}\right)$$

$$C\left(\frac{2(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{2t_3}{1+t_3^2}\right),\quad D\left(\frac{2(1-t_4^2)}{1+t_4^2},\frac{2t_4}{1+t_4^2}\right)$$

由题意 $M(1,\frac{1}{2})$，由 $k_{AM}=k_{CM}$ 推导得出：

$$t_1+t_3=3t_1t_3+1 \quad — ①$$

又有 $k_{OG}=k_{OM}=\frac{1}{2}$。根据 $k_{AB}\cdot k_{OG}=-\frac{1}{4}$ 得：

$$k_{AB}=\frac{t_1t_2-1}{2(t_1+t_2)}=-\frac{1}{2}$$

由此化简得出：

$$t_1t_2+t_1+t_2=1 \quad — ②$$

联立 ① ② 消去 $t_1$ 得：

$$t_2+t_3=2t_2t_3 \quad — ③$$

可设直线 $BC$ 上的定点为 $T(2x_0,x_0)$。由 $k_{BT}=k_{CT}$ 可求得：

$$x_0=\frac{t_2t_3+1}{t_2+t_3-t_2t_3+1}$$

将 ③ 代入 $x_0$ 的表达式中：

$$x_0=\frac{t_2t_3+1}{2t_2t_3-t_2t_3+1}=\frac{t_2t_3+1}{t_2t_3+1}=1$$

故直线 $BC$ 恒过定点 $T(2,1)$。

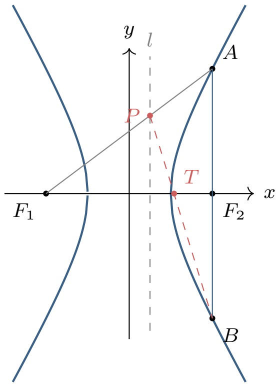
**例题 17：2024年武汉二月调研**

**题目：** 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$，其右准线为 $l:x=\dfrac{a^2}{c}$。点 $F_2$ 到直线 $l$ 的距离为 $\dfrac{3}{2}$. 过点 $F_2$ 的动直线交双曲线 $E$ 于 $A,B$ 两点；当直线 $AB$ 与 $x$ 轴垂直时，$|AB|=6$.

(1) 求双曲线 $E$ 的标准方程；

(2) 设直线 $AF_1$ 与直线 $l$ 的交点为 $P$，求证：直线 $PB$ 过定点。

**解：**




(1) 由题设右准线 $x=\dfrac{a^2}{c}$、右焦点 $F_2=(c,0)$，且

$$d_{F_2,l}=\left|c-\frac{a^2}{c}\right|=\frac{3}{2}.$$

则

$$2-\frac{a^2}{2}=\frac{3}{2}\implies a^2=1,\qquad b^2=c^2-a^2=4-1=3.$$

故双曲线方程为 $E:\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$。

(2) 对双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 取参数

$$A\Big(\frac{1+t_1^2}{1-t_1^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1-t_1^2}\Big),\quad B\Big(\frac{1+t_2^2}{1-t_2^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1-t_2^2}\Big),\quad F_2=(2,0),\ F_1=(-2,0).$$

因 $A,B,F_2$ 共线，$k_{AF_2}=k_{BF_2}$，可得

$$t_1t_2=-\frac{1}{3}. \tag{*}$$

由(*)将 $B$ 统一用 $t_1$ 表示：

$$B\Big(\frac{9t_1^2+1}{9t_1^2-1},\frac{-6\sqrt{3}\,t_1}{9t_1^2-1}\Big).$$

又

$$k_{AF_1}=\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{3-t_1^2},$$

故直线 $AF_1$ 可写为

$$l_{AF_1}:\ y=\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{3-t_1^2}(x+2).$$

与右准线 $l: x=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{1}{2}$ 交于

$$P\Big(\frac{1}{2},\frac{5\sqrt{3}\,t_1}{3-t_1^2}\Big).$$

若可看出 $l_{BP}$ 过 $T(x_0,0)$，则由 $k_{PT}=k_{BT}$：

$$\frac{\frac{5\sqrt{3}\,t_1}{3-t_1^2}}{\frac{1}{2}-x_0}=\frac{-\frac{6\sqrt{3}\,t_1}{9t_1^2-1}}{\frac{9t_1^2+1}{9t_1^2-1}-x_0}.$$

化简得

$$14(3t_1^2+1)=13x_0(3t_1^2+1)\implies x_0=\frac{14}{13}.$$

故直线 $PB$ 过定点 $T\Big(\dfrac{14}{13},0\Big)$。

**技巧点拨**

**对比系数法的补充说明：**

若看不出定点，设 $T(x_0,y_0)$，由 $k_{PT}=k_{BT}$ 得到关于 $t_1$ 的恒等式；对比 $t_1^2$ 项与常数项可推出 $y_0=0$，再回到上式即可求得 $x_0=\dfrac{14}{13}$.

这种方法适用于所有定点问题，是三角换元法在定点问题中的核心技巧。

# 第五章　面积问题与中点参数化

## 5.1　中点问题的参数化表示（椭圆/双曲线）

**中点问题的参数化表示**

对于中点问题，是考试中常出现的类型；在解析几何（乃至立体几何的坐标化）中也可以用参数表示出来，从而更方便地处理"取中点"等运算。此处仅作为中点参数坐标的结论添加，具体应用移步至同构三角章节，那里才能发挥其真正的威力。

● 椭圆的情形

在椭圆$E:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上取两点:

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right),$$

取线段 $AB$ 的中点为 $M$，则

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{a\left[(1-t_1^2)(1+t_2^2)+(1-t_2^2)(1+t_1^2)\right]}{2(1+t_1^2)(1+t_2^2)}=\frac{a(1-t_1^2t_2^2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)},$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{b\left[t_1(1+t_2^2)+t_2(1+t_1^2)\right]}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}=\frac{b(t_1+t_2)(1+t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}.$$

注意到

$$(1-t_1^2)(1+t_2^2)=1+t_2^2-t_1^2-t_1^2t_2^2,\qquad (1-t_2^2)(1+t_1^2)=1+t_1^2-t_2^2-t_1^2t_2^2,$$

两者的结构非常相似，仅仅是将下标 $1,2$ 互换而已；在后续推导中，遇到类似表达式时可以利用这种"互换结构"来减少重复计算。

并且

$$(1+t_1^2)(1+t_2^2)=1+t_1^2+t_2^2+t_1^2t_2^2=(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2.$$

因此中点 $M$ 可写成

$$M\left(\frac{a(1-t_1^2t_2^2)}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2},\ \frac{b(t_1+t_2)(1+t_1t_2)}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2}\right).$$

● 双曲线的情形

同理，在双曲线

$$C:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上取两点

$$A\left(\frac{a(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\ \frac{2bt_1}{1-t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{a(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\ \frac{2bt_2}{1-t_2^2}\right),$$

取 $AB$ 的中点为 $M$。注意

$$(1-t_1^2)(1-t_2^2)=1-t_1^2-t_2^2+t_1^2t_2^2=(t_1t_2+1)^2-(t_1+t_2)^2,$$

从而可得到

$$M\left(\frac{a(1-t_1^2t_2^2)}{(t_1t_2+1)^2-(t_1+t_2)^2},\ \frac{b(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(t_1t_2+1)^2-(t_1+t_2)^2}\right).$$

这里仅补充中点结论公式，搭配同构三角，使用效果更佳。

## 5.2 面积问题：叉乘面积法（坐标化）

**叉乘面积法**

对于面积问题，通常都要把几何量转化为坐标、向量来处理。最简便的办法之一是**叉乘面积法**，但在考试中往往需要给出证明。

**证明（以 $O(0,0)$ 为例）**

设

$$A(x_1,y_1),\quad B(x_2,y_2),\quad O(0,0).$$

三角形面积

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{O\to AB}.$$

其中

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

直线 $AB$ 的点斜式等价于

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1),$$

可写为一般式

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0.$$

因此原点到直线 $AB$ 的距离为

$$d_{O\to AB}=\frac{|x_2y_1-x_1y_2|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}.$$

代回得

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot\frac{|x_2y_1-x_1y_2|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

证明完毕。

**使用方式**

向量形式更直接：

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|,\qquad \overrightarrow{OA}=(x_1,y_1),\ \overrightarrow{OB}=(x_2,y_2),$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=x_1y_2-y_1x_2=x_1y_2-x_2y_1.$$

若把原点换为任意点 $O(x_0,y_0)$，只需将坐标做平移：

$$\overrightarrow{OA}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0),\quad \overrightarrow{OB}=(x_2-x_0,\ y_2-y_0),$$

后续操作一致。

但对于高中生来说，面积问题最好都用水平宽铅垂高来解决，毕竟你也不希望在考场上还要再证一遍向量叉乘公式。而我们有 $t_1t_2$ 的值，就可以求出直线定点，然后用水平铅垂求解面积，化简操作与叉乘类似。

## 5.3 综合例题演练

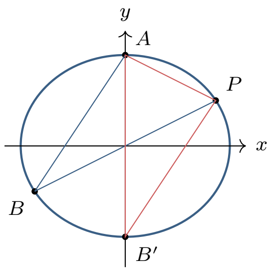
**例题 18：2024年全国一卷**

**题目：** 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上两点。

(1) 求 $C$ 的离心率；

(2) 若过 $P$ 的直线 $l$ 交 $C$ 于另一点 $B$，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 $l$ 的方程。

**解：**




(1) 由 $A(0,3)$ 知 $b=3$。将 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 代入椭圆方程：

$$\frac{9}{a^2}+\frac{9/4}{9}=1\implies\frac{9}{a^2}=\frac{3}{4}\implies a^2=12.$$

故 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$。此时椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$。

(2) 设椭圆参数化 $x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2},y=\dfrac{2bt}{1+t^2}$。

- $A(0,3)$ 对应参数 $t_1=1$；
- $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 对应参数 $t_2=2-\sqrt{3}$；
- 设 $B$ 对应参数 $t_3$。

由三点面积公式（见下文技巧点拨）：

$$S_{\triangle ABP}=2ab\frac{|(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)|}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}=9.$$

其中 $2ab=12\sqrt{3}$。代入 $t_1,t_2$ 值化简可得：

$$t_3=-1\quad\text{或}\quad t_3=-(2+\sqrt{3}).$$

**情形一：** $t_3=-1$。此时 $t_1+t_3=0$，由对称性知 $A,B$ 关于 $x$ 轴对称，故 $B(0,-3)$。直线 $PB$（即 $l$）的斜率 $k=\frac{3/2-(-3)}{3-0}=\frac{3}{2}$，方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$。

**情形二：** $t_3=-(2+\sqrt{3})$。此时 $t_2t_3=(2-\sqrt{3})[-(2+\sqrt{3})]=-1$。由对称性知 $P,B$ 关于原点对称，故 $l$ 过原点。斜率 $k=\frac{3/2}{3}=\frac{1}{2}$，方程为 $y=\frac{1}{2}x$。

**技巧点拨**

**技巧点拨 1：特殊位置关系的参数特征**

1. **椭圆中：**

   - $t_1+t_2=0\iff A,B$ 关于 $x$ 轴对称；

- $t_1t_2=-1 \iff A,B$ 关于原点对称；
- $t_1t_2=1 \iff A,B$ 关于 $y$ 轴对称。

2. **双曲线中：**

- $t_1+t_2=0 \iff A,B$ 关于 $x$ 轴对称；
- $t_1t_2=1 \iff A,B$ 关于原点对称；
- $t_1t_2=-1 \iff A,B$ 关于 $y$ 轴对称。

**技巧点拨 2：三点面积公式的推导**
对于椭圆，设三点参数分别为 $t_1,t_2,t_3$，则：

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right),\quad C\left(\frac{a(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\ \frac{2bt_3}{1+t_3^2}\right).$$

计算向量：

$$\overrightarrow{AC}=\left(2a\cdot\frac{t_1^2-t_3^2}{(1+t_1^2)(1+t_3^2)},\ 2b\cdot\frac{(t_3-t_1)(1-t_1t_3)}{(1+t_1^2)(1+t_3^2)}\right),$$
$$\overrightarrow{BC}=\left(2a\cdot\frac{t_2^2-t_3^2}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)},\ 2b\cdot\frac{(t_3-t_2)(1-t_2t_3)}{(1+t_2^2)(1+t_3^2)}\right).$$

由叉积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|$，展开得：

$$S_{\triangle ABC}=2ab\cdot\frac{\left|(t_3-t_1)(t_2-t_3)\left[(t_3+t_1)(1-t_2t_3)-(t_3+t_2)(1-t_1t_3)\right]\right|}{(1+t_3^2)^2(1+t_2^2)(1+t_1^2)}.$$

注意到：

$$(t_3+t_1)(1-t_2t_3)-(t_2+t_3)(1-t_1t_3)=(t_3^2+1)(t_1-t_2),$$

故：

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=2ab\cdot\frac{|(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_2-t_1)|}{(1+t_3^2)(1+t_2^2)(1+t_1^2)}}$$

双曲线同理可得（将 $1+t^2$ 换为 $1-t^2$）。

**技巧点拨 2：三点面积公式**

$$\text{椭圆：}S_{\triangle ABC}=2ab\frac{|(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)|}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}$$

$$\text{双曲线：}S_{\triangle ABC}=2ab\left|\frac{(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)}{(1-t_1^2)(1-t_2^2)(1-t_3^2)}\right|$$

**注意：** $A$、$B$、$C$点均在曲线上

**例题 19：网络试题**

**题目：**已知 $F_1, F_2$ 分别为椭圆

$$E:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

的左、右焦点，点 $D$ 为椭圆 $E$ 上一点，以 $DF_1$ 为直径的圆

$$C:\ x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

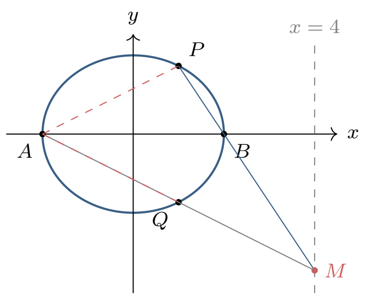
过焦点 $F_2$。

(1) 求椭圆 $E$ 的方程；

(2) $P$ 为椭圆 $E$ 上异于左、右顶点 $A, B$ 的任一点，设 $PB$ 交直线 $x=4$ 于点 $M$，$AM$ 交椭圆 $E$ 于点 $Q$。

1. 证明：$k_{AP}\cdot k_{AQ}$ 为定值；
2. 求 $\triangle APQ$ 面积的最大值。

**解：**




**(1)** 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

**(2)** 设

$$P\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad Q\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$

且顶点

$$A(-2,0),\qquad B(2,0).$$

则

$$k_{AP}=\frac{\sqrt{3}\,t_1}{2},\qquad k_{AQ}=\frac{\sqrt{3}\,t_2}{2},\qquad k_{BP}=-\frac{\sqrt{3}}{2t_1}.$$

两直线

$$\ell_{AQ}:\ y=\frac{\sqrt{3}\,t_2}{2}(x+2),\qquad \ell_{BP}:\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2t_1}(x-2)$$

都过点 $M$，且 $M$ 在直线 $x=4$ 上，故把 $x=4$ 代入可得同一 $y_M$：

$$y_M=3\sqrt{3}\,t_2=-\frac{\sqrt{3}}{t_1}\quad\Longrightarrow\quad t_1t_2=-\frac{1}{3}.$$

于是

$$k_{AP}\,k_{AQ}=\frac{3t_1t_2}{4}=-\frac{1}{4},$$

为定值。

**(3)** 取向量

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad \overrightarrow{AQ}=\left(\frac{4}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right).$$

则

$$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}\right|=4\sqrt{3}\left|\frac{t_1-t_2}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}\right|.$$

由 $t_1t_2=-\dfrac{1}{3}$,

$$(1+t_1^2)(1+t_2^2)=1+t_1^2+t_2^2+t_1^2t_2^2=\left(t_1-t_2\right)^2+\frac{4}{9}.$$

令

$$q=t_1-t_2=t_1+\frac{1}{3t_1}\in\left(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right),$$

则

$$S_{\triangle APQ}=4\sqrt{3}\left|\frac{q}{q^2+\frac{4}{9}}\right|=4\sqrt{3}\left|\frac{1}{q+\frac{4}{9q}}\right|.$$

注意到在区间 $\left(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ 与 $\left[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ 上, $q+\dfrac{4}{9q}$ 均单调递增，因此其绝对值最小值在端点取得：

$$\min\left|q+\frac{4}{9q}\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

故

$$S_{\triangle APQ}\le 4\sqrt{3}\cdot\frac{9}{8\sqrt{3}}=\frac{9}{2}.$$

当 $q=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 时取等，面积最大值为 $\dfrac{9}{2}$。

**注意：**换元后务必考虑新变量的取值范围是否满足所用不等式/极值结论的条件。

**例题 20：2024年天星教育金考卷特快专递新高考临考冲刺卷高中数学全册通用版**

**题目：** 已知椭圆

$$E:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

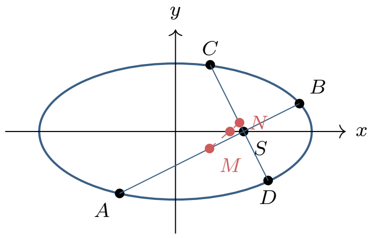
过点 $(0,1)$，且焦距为 $2\sqrt{3}$。

(1) 求椭圆 $E$ 的标准方程；

(2) 过点 $S(1,0)$ 作两条互相垂直的弦 $AB,CD$，设弦 $AB,CD$ 的中点分别为 $M,N$。

1. 证明：直线 $MN$ 必过定点；
2. 若直线 $AB,CD$ 的斜率均存在，求 $\triangle MNS$ 面积的最大值。

**解：**




**(1)** 由 $E$ 过 $(0,1)$ 得 $b=1$。又焦距 $2c=2\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{3}$，而 $a^2-b^2=c^2$，故 $a^2=1+3=4$，所以

$$E:\ \frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

**(2)** 设 $M(x,y)$ 为过 $S(1,0)$ 的弦 $AB$ 的中点，则弦 $AB$ 与 $MS$ 共线，故

$$k_{AB}=k_{MS}=\frac{y}{x-1}.$$

由点差/三角形中点坐标关系可得

$$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4},\qquad k_{OM}=\frac{y}{x}.$$

于是

$$\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x}=-\frac{1}{4}\implies 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16y^2=1.$$

同理，$N$ 也满足同样的轨迹方程，因此

$$M,N\ \text{均在}\ 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16y^2=1\ \text{上}.$$

可对该椭圆作参数设定（用有理参数）：

$$N\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad M\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{t_2}{1+t_2^2}\right).$$

若 $AB\perp CD$ 且斜率均存在，则

$$k_{AB}\,k_{CD}=k_{MS}\,k_{NS}=-1\implies t_1t_2=-\frac{1}{4}.$$

由 $M, N$ 的坐标可写出直线 $MN$：

$$\ell_{MN}:\ \frac{1}{2}y(t_1+t_2)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)(t_1t_2-1)=\frac{1}{8}(t_1t_2+1).$$

代入 $t_1t_2=-\frac{1}{4}$ 可知 $\ell_{MN}$ 恒过定点

$$\left(\frac{4}{5}, 0\right).$$

**(3)** 由 $S(1,0)$，

$$\overrightarrow{SN}=\left(-\frac{t_1^2}{1+t_1^2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{t_1}{1+t_1^2}\right), \qquad \overrightarrow{SM}=\left(-\frac{t_2^2}{1+t_2^2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{t_2}{1+t_2^2}\right).$$

面积

$$S_{\triangle SMN}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SN}\times\overrightarrow{SM}\right|=\frac{1}{16}\left|\frac{q}{q^2+\frac{9}{16}}\right|=\frac{1}{16}\left|\frac{1}{q+\frac{9}{16q}}\right|,$$

其中

$$q=t_1-t_2=t_1+\frac{1}{4t_1}\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

又 $q+\frac{9}{16q}$ 在 $(-\infty,-\frac{3}{4})$ 与 $(\frac{3}{4},+\infty)$ 上单调递增，结合 $q$ 的取值范围可知当 $q=\pm1$ 时取到极值，从而

$$S_{\triangle SMN}\le\frac{1}{25}.$$

故 $\triangle MNS$ 的面积最大值为 $\frac{1}{25}$。

**例题 21：2022年全国一卷**

**题目**：已知点 $A(2,1)$ 在双曲线

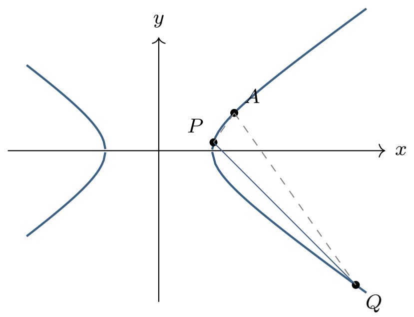
$$C:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1\ (a>1)$$

上，直线 $l$ 交 $C$ 于 $P,Q$ 两点，直线 $AP,AQ$ 的斜率之和为 0。

(1) 求 $l$ 的斜率；

(2) 若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积。

**解**：




**(1)** 由 $A(2,1)\in C$ 可得 $a^2=2$，故

$$C:\ \frac{x^2}{2}-y^2=1.$$

作参数设定

$$A\left(\frac{\sqrt{2}(1+t_0^2)}{1-t_0^2},\ \frac{2t_0}{1-t_0^2}\right),\quad P\left(\frac{\sqrt{2}(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\ \frac{2t_1}{1-t_1^2}\right),\quad Q\left(\frac{\sqrt{2}(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\ \frac{2t_2}{1-t_2^2}\right),$$

其中 $t_0=\sqrt{2}-1$（对应 $A(2,1)$）。
可得

$$k_{AP}=\frac{t_0t_1+1}{\sqrt{2}\,(t_1+t_0)},\qquad k_{AQ}=\frac{t_0t_2+1}{\sqrt{2}\,(t_2+t_0)}.$$

由题设 $k_{AP}+k_{AQ}=0$ 且 $t_0=\sqrt{2}-1$，化简得

$$\sqrt{2}(t_1+t_2)+t_1t_2+1=0.$$

又

$$k_{PQ}=\frac{t_1t_2+1}{\sqrt{2}\,(t_1+t_2)}=-1,$$

所以直线 $l$ 的斜率为 $-1$。

**(2)** 由两直线夹角的正切公式

$$\tan\angle PAQ=\left|\frac{k_{AQ}-k_{AP}}{1+k_{AP}k_{AQ}}\right|,$$

结合 $k_{AP}+k_{AQ}=0$，题设 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$ 可推出

$$k_{AQ}=-\sqrt{2},\qquad k_{AP}=\sqrt{2}.$$

再由

$$k_{AQ}=\frac{t_0t_2+1}{\sqrt{2}\,(t_2+t_0)},\qquad k_{AP}=\frac{t_0t_1+1}{\sqrt{2}\,(t_1+t_0)}$$

解得

$$t_1=\frac{5-3\sqrt{2}}{7},\qquad t_2=3\sqrt{2}-5.$$

因此

$$P\left(\frac{10-4\sqrt{2}}{3},\ \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right),\qquad Q\left(\frac{10+4\sqrt{2}}{3},\ -\frac{4\sqrt{2}+5}{3}\right).$$

向量

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4-4\sqrt{2}}{3},\ \frac{4\sqrt{2}-8}{3}\right),\qquad \overrightarrow{AQ}=\left(\frac{4+4\sqrt{2}}{3},\ -\frac{4\sqrt{2}+8}{3}\right).$$

利用之前的面积叉乘结论也可得：

$$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AQ}\right|=\frac{16\sqrt{2}}{9}.$$

# 第六章　普通三角、反设三角、旋转三角：优劣性与适用题型

## 6.1　传统三角、旋转三角与反设三角

**三角代换的三种方法**

对于传统三角，我们常以弦点坐标代入三角两弦式，从而直接得出 $t_1, t_2$ 的值。
**例：**

$$2y(t_1+t_2)-\sqrt{5}\,(t_1t_2-1)x=2\sqrt{5}\,(t_1t_2+1)$$

过点 $(4,0)$，得$t_1t_2=-\frac{1}{3}$,为两次型。若过点 $(0,4)$，则

$$4(t_1+t_2)=\sqrt{5}\,(t_1t_2+1),$$

可能出现两次、一次、零次等情况，会影响后续计算，结构也不方便；因此引入旋转三角（或反设三角）来规避这些问题。
**旋转三角：**顾名思义就是把坐标系进行旋转。通常情况下，以逆、顺时针旋转 $90^\circ$ 为主。
**例：**

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\quad \text{顺时针旋转 } 90^\circ\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$$

**参数方程：**

$$\left(\frac{2(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t}{1+t^2}\right),\qquad \left(\frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{4t}{1+t^2}\right).$$

**两弦式：**

$$l:\ 2y(t_1+t_2)-\sqrt{3}\,x(t_1t_2-1)=2\sqrt{3}\,(t_1t_2+1),$$
$$l:\ \sqrt{3}\,y(t_1+t_2)-2x(t_1t_2-1)=2\sqrt{3}\,(t_1t_2+1).$$

其本质理解：**旋转后当作一道新题回来解答**。
回到先前问题：$(0,4)$ 旋转 $90^\circ \Rightarrow (\pm4,0)$，代入新的两弦式，可得没有 $t_1+t_2$ 这一项。注意：转前后直线互相垂直，故斜率乘积为 $-1$，即 $k'=-\dfrac{1}{k}$。
**反设三角：**利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 或其他恒等式来满足代数上的恒成立。
**例：**

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

可设

$$(x,y)=(2\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta),$$

若反设

$$(x,y)=(2\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta),$$

代入方程也满足。
从几何上：$(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$ 中参数 $\theta$ 的离心角基准为 $x$ 轴；而 $(2\sin\theta,\sqrt{3}\cos\theta)$ 的基准为 $y$ 轴。若设前一种参数为 $\theta_1$，反设为 $\theta_2$，则

$$\theta_1=\theta_2-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

个人表明，旋转三角更易上手。双曲线、抛物线也可使用！

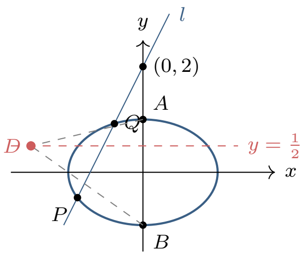
### 例题 22：网络试题

**题目：** 已知椭圆

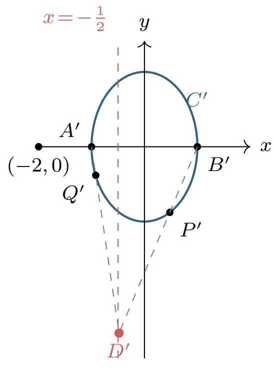
$$C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A, B$ 分别为椭圆 $C$ 的上、下顶点，$O$ 为坐标原点，直线 $y=kx+2$ 与椭圆 $C$ 交于不同的两点 $P, Q$。若 $|AB|=2$，证明：直线 $BP$ 与直线 $AQ$ 的交点 $D$ 在定直线上。

**解：**




旋转前




旋转后

**(2) 旋转三角解法：**

将椭圆

$$C: \frac{x^2}{2}+y^2=1 \quad \text{逆时针旋转 } 90^\circ \Rightarrow \ C': x^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

此时

$$A(0,1)\to A'(-1,0), \qquad B(0,-1)\to B'(1,0).$$

可设

$$P'\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, \frac{2\sqrt{2}\,t_1}{1+t_1^2}\right), \quad Q'\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}, \frac{2\sqrt{2}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$

且 $(0,2)\to(-2,0)$。

两点弦（两弦式）：

$$l_{P'Q'}: \ y(t_1+t_2)-\sqrt{2}\,x(t_1t_2-1)=\sqrt{2}(t_1t_2+1).$$

过 $(-2,0)$ 得 $t_1t_2=3$。

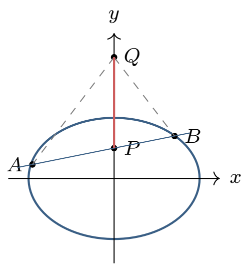
$$l_{A'Q'}: \ y=\sqrt{2}\,t_2(x+1), \qquad l_{B'P'}: \ y=-\frac{\sqrt{2}}{t_1}(x-1).$$

由此可得交点横坐标 $x=-\frac{1}{2}$。旋转回去：$x=-\frac{1}{2}\mapsto y=\frac{1}{2}$，故 $D$ 在定直线 $y=\frac{1}{2}$ 上。

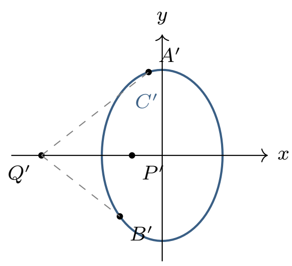
**例题 23：网络试题**

**题目：**已知椭圆
$$C:\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,$$
直线 $l$ 过点 $P(0,1)$ 且与椭圆 $C$ 交于 $A,B$ 两点，点 $Q(0,4)$，求证：$PQ$ 平分 $\angle AQB$。

**解法一：旋转三角**




旋转前




旋转后

将椭圆
$$C:\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\quad \text{逆时针旋转 } 90^\circ \Rightarrow C':\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1.$$
由题仅需求证 $k_{Q'A'}+k_{Q'B'}=0$ 即可。
设
$$A'\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{4\sqrt{2}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\quad B'\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{4\sqrt{2}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$
且
$$Q(0,4)\to Q'(-4,0),\qquad P(0,1)\to P'(-1,0).$$
两点弦：
$$l_{A'B'}:\ 2y(t_1+t_2)-2\sqrt{2}\,x(t_1t_2-1)=4\sqrt{2}(t_1t_2+1).$$
过 $P'(-1,0)$ 得
$$t_1t_2=-3.$$
进而
$$k_{Q'A'}+k_{Q'B'}=2\sqrt{2}\left(\frac{t_1}{t_1^2+3}+\frac{t_2}{t_2^2+3}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{t_1}{t_1^2+3}-\frac{t_1}{t_1^2+3}\right)=0.$$

**解法二：反设三角**

同样地，仅证 $k_{QA}+k_{QB}=0$。设
$$A\left(\frac{4\sqrt{2}\,t_1}{1+t_1^2},\ \frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{4\sqrt{2}\,t_2}{1+t_2^2},\ \frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2}\right).$$
两点弦：
$$l_{AB}:\ 2x(t_1+t_2)-2\sqrt{2}\,y(t_1t_2-1)=4\sqrt{2}(t_1t_2+1).$$
过 $P(0,1)$ 得
$$t_1t_2=-\frac{1}{3}.$$
并且
$$k_{QA}+k_{QB}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3t_1+\frac{1}{t_1}+3t_2+\frac{1}{t_2}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3t_1+\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_1}-3t_1\right)=0.$$

## 6.2 技巧总结

**技巧点拨**

**三角代换方法的选择策略：**

- 对于左右顶点，以及直线过 $x$ 轴上定点的问题：首选**正常的三角**；
- 对于上下顶点，以及直线过 $y$ 轴上定点的问题：首选**旋转三角**或**反设三角**；
- 对于直线过定点 $(-a,t)$：首选正常三角或旋转三角；
- 对于直线过定点 $(a,t)$：首选旋转三角。

**附注：**其实哪种三角都可解此问题，只是快慢的问题。

**例题 24：2025年安阳九调**

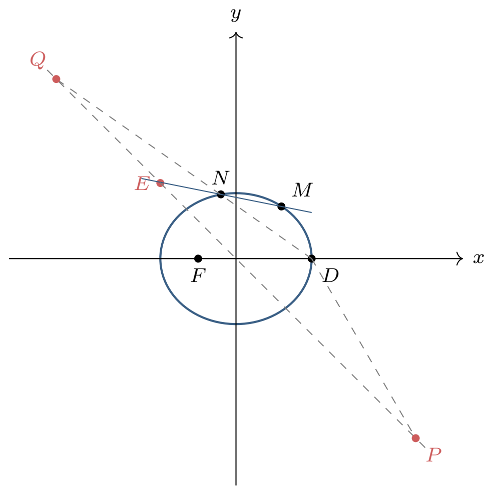
**题目：** 已知椭圆

$$C:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

经过点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$，且离心率为 $\frac{1}{2}$。

1. 求 $C$ 的方程；
2. 若 $C$ 的右顶点为 $D$，左焦点为 $F$，点 $M,N$ 是 $C$ 上的两个动点，直线 $MN$ 的斜率存在且不为 0：若 $O$ 为坐标原点，直线 $MN$ 过点 $E(-2,2)$，直线 $OE$ 与直线 $DM,DN$ 分别交于点 $P,Q$，证明：$|OP|=|OQ|$。

**解：**




(1) 由题可得椭圆方程：

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

(2) 正常三角设

$$M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right).$$

由 $l_{MN}$ 过 $(-2,2)$ 得

$$t_1+t_2=\sqrt{3}.$$

$$l_{DM}:\ y=\frac{-\sqrt{3}}{2t_1}(x-2),\qquad l_{DN}:\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2t_2}(x-2),\qquad l_{OE}:\ y=-x.$$

设 $P,Q$ 为 $OE$ 与 $DM,DN$ 的交点，则

$$y_P=\frac{2\sqrt{3}}{2t_1-\sqrt{3}},\qquad y_Q=\frac{2\sqrt{3}}{2t_2-\sqrt{3}}.$$

从而

$$y_P+y_Q=\frac{4\sqrt{3}(t_1+t_2)-12}{4t_1t_2-2\sqrt{3}(t_1+t_2)+3}=0\quad\Rightarrow\quad |OP|=|OQ|.$$

## 6.3 三种设参对比

**技巧点拨**

**三角代换方法效率对比**

设椭圆

$$E:\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,$$

点 $P(2,1)$，直线 $l_{MN}$ 过 $P$ 且与 $E$ 交于 $M,N$ 两点。

**正常三角：**

$$M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),$$

由 $l_{MN}$ 过 $P(2,1)$ 得

$$t_1+t_2=4t_1t_2.$$

**反设三角：**

$$M\left(\frac{4t_1}{1+t_1^2},\ \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{4t_2}{1+t_2^2},\ \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}\right),$$

由 $l_{MN}$ 过 $P(2,1)$ 得

$$t_1+t_2=2t_1t_2.$$

**旋转三角（逆时针 $90^\circ$）：**

$$M\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2},\ \frac{4t_1}{1+t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2},\ \frac{4t_2}{1+t_2^2}\right),$$

由 $l_{MN}$ 过 $P'(-1,2)$ 得

$$t_1+t_2=2.$$

**总结：**三种设法比较下来，旋转三角结果最简单。

**例题 25：2022年浙江卷**

**题目：**如图，已知椭圆

$$\frac{x^2}{12}+y^2=1.$$

设 $A,B$ 是椭圆上异于 $P(0,1)$ 的两点，且点 $Q\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 在线段 $AB$ 上，直线 $PA,PB$ 分别交直线

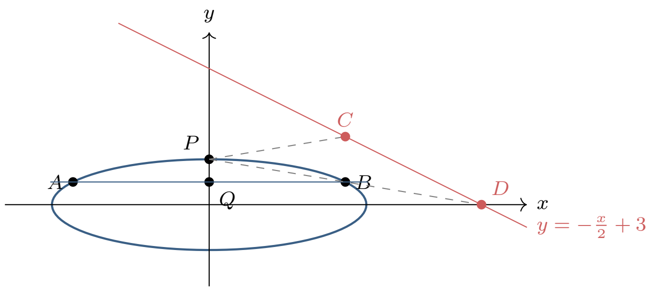
$$y=-\frac{1}{2}x+3$$

于 $C,D$ 两点。

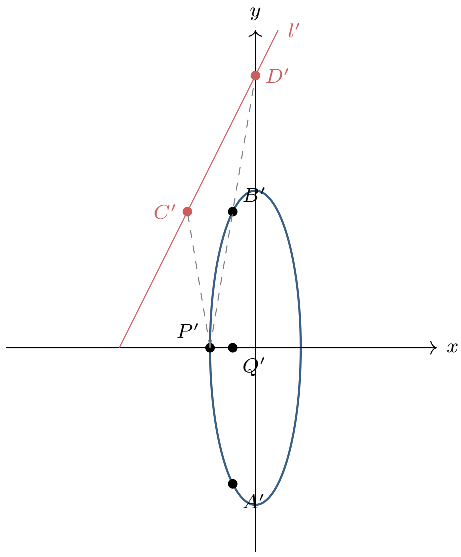
(I) 求点 $P$ 到椭圆上点的距离的最大值；

(II) 求 $|CD|$ 的最小值。

**解：**




旋转前




旋转后

**(I) 计算：**
令椭圆参数为 $x=2\sqrt{3}\cos t,\ y=\sin t$，则

$$d^2=(x-0)^2+(y-1)^2=12\cos^2 t+(\sin t-1)^2=13-11\sin^2 t-2\sin t.$$

设 $s=\sin t\in[-1,1]$，则

$$d^2=13-11s^2-2s$$

在 $[-1,1]$ 上取最大值于 $s=-\frac{1}{11}$，从而

$$d_{\max}^2=13-\frac{1}{11}+\frac{2}{11}=\frac{144}{11},\qquad d_{\max}=\frac{12}{\sqrt{11}}=\frac{12\sqrt{11}}{11}.$$

**(II) 旋转三角解法：**
将

$$C:\ \frac{x^2}{12}+y^2=1$$

逆时针方向旋转 $90^\circ$ 得

$$C':\ x^2+\frac{y^2}{12}=1,\qquad P(0,1)\to P'(-1,0),\quad Q\left(0,\frac{1}{2}\right)\to Q'\left(-\frac{1}{2},0\right).$$

设

$$A'\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2},\frac{4\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\quad B'\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2},\frac{4\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right),$$

且直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 旋转后为 $y'=2x+6$。
弦 $A'B'$：

$$l_{A'B'}:\ 2\sqrt{3}\,x(1-t_1t_2)+4y(t_1+t_2)=2\sqrt{3}(t_1t_2+1).$$

过 $Q'(-\frac{1}{2},0)$，得 $t_1t_2=-3$。
又

$$l_{P'A'}:\ y=2\sqrt{3}\,t_1(x+1),\qquad l_{P'B'}:\ y=2\sqrt{3}\,t_2(x+1).$$

令 $k_1=2\sqrt{3}\,t_1$，$k_2=2\sqrt{3}\,t_2$，则 $k_1k_2=-36$。与 $y'=2x+6$ 相交可得

$$x_C=\frac{4}{k_1-2}-1,\qquad x_D=\frac{4}{k_2-2}-1.$$

因此

$$|CD|=\sqrt{1+2^2}\,|x_C-x_D|=4\sqrt{5}\left|\frac{k_1-k_2}{(k_1-2)(k_2-2)}\right|.$$

令 $k_1=x$，则 $k_2=-\frac{36}{x}$，从而

$$|CD|=2\sqrt{5}\left|\frac{x^2+36}{x^2+16x-36}\right|.$$

设

$$y=\frac{x^2+36}{x^2+16x-36},$$

则

$$(1-y)x^2-16yx+36(y+1)=0.$$

判别式

$$\Delta=(16y)^2+4(y-1)\cdot 36(y+1)=16y^2+36(y^2-1)\geq 0$$

故 $|y|\geq\frac{3}{5}$，从而

$$|CD|=2\sqrt{5}\,|y|\geq\frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

**例题 26：网络试题**

**题目：** 已知双曲线

$$C:\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$。

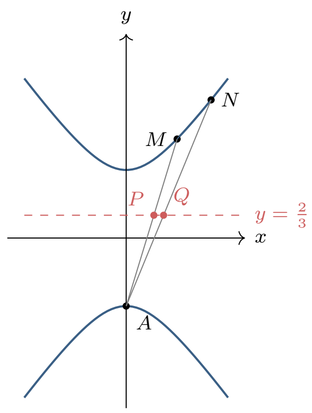
(1) 求 $C$ 的方程；

(2) $C$ 的下顶点为 $A$，直线 $y=kx+\frac{2}{3}$ 与 $C$ 的上支交于 $M,N$ 两点（点 $M$ 在靠近 $y$ 轴的一侧），直线 $y=\frac{2}{3}$ 与直线 $AM,AN$ 分别交于点 $P,Q$，记直线 $OP,AQ$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$（$O$ 为原点）。

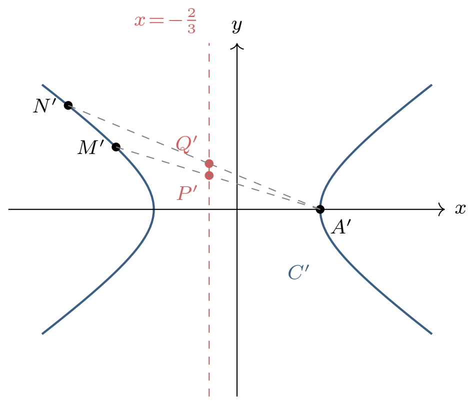
(i) 求证：$k_1k_2=1$；

(ii) 求 $\triangle OAP$ 外接圆半径 $r$ 的取值范围。

**解：**



旋转前



旋转后

(1)

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1.$$

(2) 将 $C:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1$ 逆时针旋转 $90^\circ$：

$$C':\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1,\quad \left(0,\frac{2}{3}\right)\to\left(-\frac{2}{3},0\right),\quad A(0,2)\to A'(2,0).$$

设

$$M'\left(\frac{2(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\frac{2\sqrt{2}\,t_1}{1-t_1^2}\right),\quad N'\left(\frac{2(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\frac{2\sqrt{2}\,t_2}{1-t_2^2}\right),$$

则

$$l_{A'M'}:\ y=\frac{1}{\sqrt{2}\,t_1}(x-2),\qquad l_{A'N'}:\ y=\frac{1}{\sqrt{2}\,t_2}(x-2).$$

令 $x=-\frac{2}{3}$，

$$P'\left(-\frac{2}{3},-\frac{8\sqrt{2}}{3t_1}\right),\qquad Q'\left(-\frac{2}{3},-\frac{8\sqrt{2}}{3t_2}\right).$$

弦 $M'N'$：

$$l_{M'N'}:\ 2y(t_1+t_2)-\sqrt{2}\,x(t_1t_2+1)=2\sqrt{2}\,(t_1t_2-1).$$

过 $(-\frac{2}{3},0)$ 得 $t_1t_2=2$。

斜率：

$$k_{OP}=-\frac{1}{k_{O'P'}}=\frac{\sqrt{2}}{4}t_1,\qquad k_{AQ}=-\frac{1}{k_{A'Q'}}=\sqrt{2}\,t_2,$$

故

$$k_{OP}\cdot k_{AQ}=\frac{\sqrt{2}}{4}t_1\cdot\sqrt{2}\,t_2=\frac{t_1t_2}{2}=1.$$

(3) 不妨令 $M',N'$ 均在第一象限，由(2) $k_1k_2=1\Rightarrow k_1=\dfrac{1}{k_2}$。

设 $O'P'$的倾斜角为 $\alpha$，$A'Q'$的倾斜角为 $\beta$，则

$$\tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),\quad \therefore \alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

故 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$。$\therefore\angle A'O'P'+\angle P'Q'A'=\pi$。$\therefore O'A'Q'P'$ 四点共圆。

$\therefore\triangle O'A'P'$ 的外接圆为四边形 $O'A'Q'P'$ 外接圆，设外接圆圆心为 $O'_o$，则有

$$x_{O'_o}=\frac{x_{A'}}{2}=1,\qquad y_{O'_o}=\frac{y_{P'}+y_{Q'}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{3}(t_1+t_2).$$

$\because M'N'$ 在同一象限 $\Rightarrow y_{M'}y_{N'}>0\Rightarrow t_1^2+t_2^2<5$。

又 $t_1^2+t_2^2>2t_1t_2=4$ （$t_1\neq t_2$）。$\therefore t_1^2+t_2^2\in(4,5)$。

外接圆半径

$$|O'O'_o|=r=\sqrt{1+\frac{2}{9}(t_1^2+t_2^2+4)}\in\left(\frac{5}{3},\sqrt{3}\right).$$

**例题 27：2025甘肃兰州诊断**

**题目：** 已知椭圆

$$E:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

的上顶点为 $A(0,\sqrt{2})$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(1) 求椭圆 $E$ 的方程；

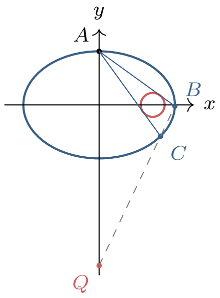
(2) 若 $a>b>0$，过点 $A$ 的直线与椭圆 $E$ 交于另一个点 $B$，并与圆

$$P:\ (x-\sqrt{2})^2+y^2=r^2\ (r>0)$$

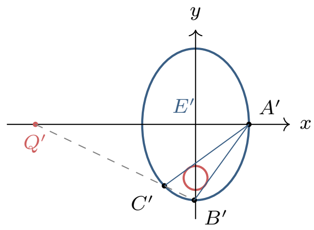
相切，切点为 $Q(0,-3\sqrt{2})$。直线 $QB$ 与椭圆 $E$ 交于点 $C$（异于 $A$），证明：$AC$ 与圆 $P$ 相切。

---

**解：**




旋转前




旋转后

(1)

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.$$

(2) 将 $E$ 顺时针旋转 $90°$：

$$E':\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1.$$

设

$$B\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{4t_1}{1+t_1^2}\right),\quad C\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{4t_2}{1+t_2^2}\right),\quad A\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{4t_3}{1+t_3^2}\right),$$

其中 $t_3=0$，并记 $Q'(-3\sqrt{2},0)$，$P(0,-\sqrt{2})$。由 $k_{BQ}=k_{CQ}$ 得

$$t_1t_2=2. \tag{1}$$

又由

$$d_{P\to l_{QB}}=d_{P\to l_{AC}}$$

只需证

$$\frac{\left|t_1+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{t_1^2+2}}=\frac{\left|t_2+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{t_2^2+2}},$$

将 (1) 代入可得成立，故 $AC$ 与圆 $P$ 相切。

**例题 28：2026届雅礼中学月考**

**题目：** 已知椭圆

$$C:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

右焦点为 $F$，点 $M\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆 $C$ 上，且 $MF\perp x$ 轴。过点 $M$ 且与椭圆 $C$ 有且只有一个公共点的直线 $l$ 与 $x$ 轴交于点 $P$， $A$ 为椭圆 $C$ 的上顶点，点 $R$ 是椭圆 $C$ 上异于点 $M$ 的动点。

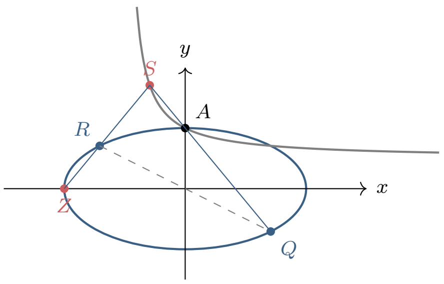
(1) 求椭圆 $C$ 的方程；

(2) 设过点 $A$ 的直线与椭圆 $C$ 的另一个交点为 $Q$，与曲线

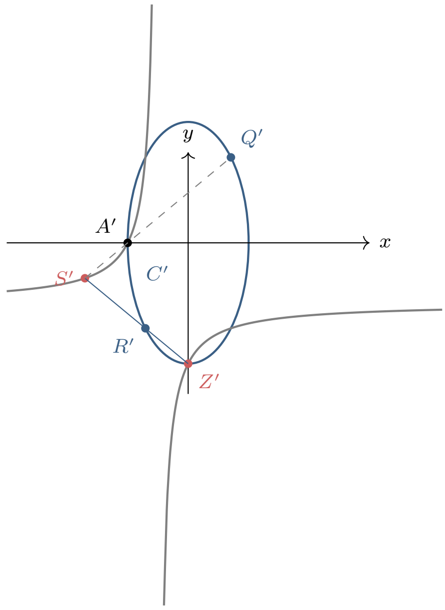
$$y=\frac{x+2}{2(x+1)}$$

的另一个交点为 $S$，若直线 $RQ$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，试证明：直线 $SR$ 过定点。

**解：**




旋转前




旋转后

(1)

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

(2) 将 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 逆时针旋转 $90°$：

$$C':\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\qquad y'=-\frac{2(x+1)}{2x+1}.$$

可设

$$R\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2},\frac{4t_1}{1+t_1^2}\right),\quad Q\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2},\frac{4t_2}{1+t_2^2}\right),\quad A(-1,0),$$

且 $k_{RQ}=2$，从而

$$t_2=\frac{t_1+1}{t_1-1}. \tag{1}$$

又

$$l_{AQ}:\ y=2t_2(x+1).$$

与 $y' = -\dfrac{2(x+1)}{2x+1}$ 交于

$$S\left(\frac{t_2-1}{2t_2}, t_2-1\right),$$

由 (1) 得

$$S\left(-\frac{t_1}{t_1+1}, \frac{2}{t_1-1}\right).$$

此时

$$k_{RS} = \frac{2(t_1+1)}{1-t_1}, \qquad l_{RS}:\ y = \frac{2(t_1+1)}{1-t_1}x - 2,$$

故 $l_{RS}$ 恒过点 $(0,-2)$。旋转回原坐标系后，对应定点为 $(-2,0)$。

**技巧点拨**

**点拨**：给定点 $A(x,y)$，

- 若**逆时针**旋转 $90^\circ \implies A'(-y,x)$
- 若**顺时针**旋转 $90^\circ \implies A'(y,-x)$

**例题 29：2025年武汉四月调考**

**题目：**如图，椭圆

$$\Gamma_1:\ \frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1\ (m>n>0),\qquad \Gamma_2:\ \frac{x^2}{n}+\frac{y^2}{m}=1,$$

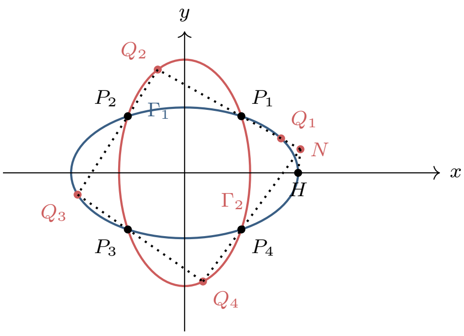
已知 $\Gamma_1$ 右顶点为 $H(2,0)$，且它们的交点分别为

$$P_1(1,1),\ P_2(-1,1),\ P_3(-1,-1),\ P_4(1,-1).$$

(1) 求 $\Gamma_1$ 与 $\Gamma_2$ 的标准方程；

(2) 点 $Q_1$ 是 $\Gamma_1$ 上的动点，直线 $Q_1P_1$ 交 $\Gamma_2$ 于点 $Q_2$，直线 $Q_2P_2$ 交 $\Gamma_1$ 于点 $Q_3$，直线 $Q_3P_3$ 交 $\Gamma_2$ 于点 $Q_4$，直线 $Q_4P_4$ 与直线 $Q_1P_1$ 交于点 $N$，求点 $G$ 坐标，使直线 $NG$ 与直线 $NH$ 的斜率之积为定值（上述各点均不重合）。

**解：**




(1)

$$\Gamma_1:\ \frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1,\qquad \Gamma_2:\ \frac{y^2}{4}+\frac{3x^2}{4}=1.$$

(2) 将 $\Gamma_2$ 逆时针旋转 $90^\circ$ 得

$$\Gamma_2':\ \frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1,$$

并有点的对应关系：$P_1\to P_2,\ P_2\to P_3,\ P_3\to P_4,\ P_4\to P_1$。

在 $\Gamma_2'$ 上作参数表示：

$$P_1\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{4}{\sqrt3}\frac{t_1}{1+t_1^2}\right),\ P_2\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{4}{\sqrt3}\frac{t_2}{1+t_2^2}\right),$$
$$P_3\left(\frac{2(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{4}{\sqrt3}\frac{t_3}{1+t_3^2}\right),\ P_4\left(\frac{2(1-t_4^2)}{1+t_4^2},\frac{4}{\sqrt3}\frac{t_4}{1+t_4^2}\right),$$

其中 $t_1=\frac{1}{\sqrt3}$，$t_2=\sqrt3$，$t_3=-\sqrt3$，$t_4=-\frac{1}{\sqrt3}$。再设

$$Q_2\left(\frac{2(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\frac{4}{\sqrt3}\frac{t_0}{1+t_0^2}\right).$$

记

$$k_1'=k_{Q_2'P_1}=\frac{\sqrt3\,t_0-1}{\sqrt3\,t_0+3},\qquad k_2'=k_{Q_2'P_2}=\frac{\sqrt3\,t_0-1}{\sqrt3(t_0-\sqrt3)}.$$

由旋转性质 $k\cdot k'=-1$，得

$$k_2=-\frac{1}{k_2'}=\frac{\sqrt3\,t_0-3}{\sqrt3\,t_0+1},\qquad k_1=-\frac{1}{k_1'}=\frac{\sqrt3\,t_0+3}{1-\sqrt3\,t_0}.$$

消去 $t_0$ 得递推关系

$$k_2 = \frac{k_1+3}{1-k_1} \tag{1}$$

同理设 $Q_3\left(\frac{2(1-t_Q^2)}{1+t_Q^2}, \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}t_Q}{1+t_Q^2}\right)$，$k_2 = k_{Q_3P_2} = \dfrac{\sqrt{3}\,t_Q-1}{\sqrt{3}(t_Q+\sqrt{3})}$，$k_3 = k_{Q_3P_3} = \dfrac{-\sqrt{3}\,t_Q-1}{\sqrt{3}(t_Q-\sqrt{3})}$。

消去 $t_Q$ 可得：

$$k_3 = \frac{1+k_2}{1-3k_2}. \tag{2}$$

而 $Q_4$ 在 $\Gamma_2$ 上，与 $Q_2$ 同理可得：

$$k_4 = \frac{k_3+3}{1-k_3}. \tag{3}$$

联立 (1)(2)(3) 得

$$k_4 = \frac{3k_1+5}{k_1+3}.$$

设 $N(x,y)$，则v

$$k_1 = \frac{y-1}{x-1}, \qquad k_4 = \frac{y+1}{x-1}.$$

代入可得

$$y^2 = 5x^2-16x+12 = (5x-6)(x-2),$$

从而存在定点

$$G\left(\frac{6}{5},0\right)$$

使得

$$k_{GN}\cdot k_{HN} = 5$$

为定值。

$k_3 = k_{Q_3P_3} \quad k_4 = k_{Q_4P_4}$

# 第七章　同构三角：综合应用与高级技巧

## 7.1　同构三角理论

**同构三角：直线同构**

同构三角：本质就是利用相同结构的方程，去构造出韦达定理！

**例**：在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

有两点

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right).$$

不妨取直线 $l_{AB}:y=kx+m$。因 $A,B$ 均在直线上，代入得

$$\frac{2bt_1}{1+t_1^2}=k\cdot\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2}+m,\qquad \frac{2bt_2}{1+t_2^2}=k\cdot\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2}+m.$$

即对 $t=t_1,t_2$ 均满足

$$t^2(m-ak)-2bt+(m+ak)=0.$$

从而（韦达定理）

$$t_1+t_2=\frac{2b}{m-ak},\qquad t_1t_2=\frac{m+ak}{m-ak}.$$

对一元二次方程 $at^2+bt+c=0$ 有

$$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

因此本题对应

$$\Delta=(-2b)^2-4(m-ak)(m+ak)=4(b^2+a^2k^2-m^2),$$

$$|t_1-t_2|=\frac{2\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{|m-ak|}.$$

同样地，在双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上有两点

$$A\left(\frac{a(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\frac{2bt_1}{1-t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{a(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\frac{2bt_2}{1-t_2^2}\right).$$

取 $l_{AB}:y=kx+m$ 代入，可得（对 $t=t_1,t_2$）

$$t^2(ak-m)-2bt+(ak+m)=0,$$

从而

$$t_1+t_2=\frac{2b}{ak-m},\qquad t_1t_2=\frac{ak+m}{ak-m}.$$

由同构可反解 $k,m$：

$$\text{椭圆：}\quad k=\frac{b(t_1t_2-1)}{a(t_1+t_2)},\qquad m=\frac{b(t_1t_2+1)}{t_1+t_2};$$

$$\text{双曲线：}\quad k=\frac{b(t_1t_2+1)}{a(t_1+t_2)},\qquad m=\frac{b(t_1t_2-1)}{t_1+t_2}.$$

接下来把 $k,m$ 代回 $l_{AB}$ 便有两点式！这是我们最常用的直线同构，也是最易掌握的，解决高考范围的题足够用。

**更多同构构造技巧**

同样地，还有另外的小玩法。对椭圆上两点 $A(t_1),B(t_2)$，有

$$x_A+x_B=\frac{2a(1-t_1^2t_2^2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)},\qquad y_A+y_B=\frac{2b(t_1+t_2)(1+t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}.$$

很多人都记不住，不妨这样令

$$x_i=\frac{a(1-t_i^2)}{1+t_i^2},\qquad \alpha=1-t_i^2,\qquad p=1+t_i^2\quad(\Rightarrow\ p+\alpha=2),$$

则

$$x_i=\frac{(2-p)a}{p}.$$

从而（设 $p_1=1+t_1^2$，$p_2=1+t_2^2$）

$$x_1+x_2=2a\left(\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}-1\right)=\frac{2a(1-t_1^2t_2^2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}.$$

同理 $y_A+y_B$ 也可如此处理。当然这种小玩法还可运用在别的地方，自行探索哦~

除了上述主观上的同构，我们还可以自行构造同构。

**例：**

$$(x-x_1)(x-x_2)=0\implies x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2=0.$$

代入椭圆或双曲线参数

$$x_i=\frac{a(1-t_i^2)}{1+t_i^2}\quad\text{或}\quad x_i=\frac{a(1+t_i^2)}{1-t_i^2},$$

换元得到关于 $P$ 的方程

$$P^2\left[x_1x_2+a^2+a(x_1+x_2)\right]-P\left[2a(x_1+x_2)+4a^2\right]+4a^2=0,\qquad P=1+t_i^2\ \text{或}\ 1-t_i^2,$$

进而用韦达定理反解出 $x_1+x_2$ 与 $x_1x_2$。

同样地，构造

$$(k-k_1)(k-k_2)=0$$

代入椭圆

$$k=\frac{b(t_it_0-1)}{a(t_i+t_0)},\qquad i=1,2;\quad t_0,t_1,t_2\ \text{对应椭圆上}\ A,B,C\ \text{点}.$$

可得关于 $t_i$ 的二次式

$$\begin{aligned}&t_i^2\left[bt_0^2-ab(k_1+k_2)t_0+a^2k_1k_2\right]+t_i\left[-2bt_0^2+ab(k_1+k_2)(1-t_0^2)+2a^2t_0k_1k_2\right]\\&\qquad+b^2+ab(k_1+k_2)t_0+a^2k_1k_2t_0^2=0.\end{aligned}$$

再同除 $1+t_0^2$ 便可得到

$$\frac{1-t_0^2}{1+t_0^2}\quad\text{与}\quad\frac{2t_0}{1+t_0^2},$$

进而化得 $x_A, y_A$ 的坐标。并且

$$t_1+t_2=\frac{\left(by_A-b(k_1+k_2)x_A-\frac{a^2}{b}k_1k_2y_A\right)(1+t_0^2)}{bt_0^2-ab(k_1+k_2)t_0+a^2k_1k_2},$$

以及

$$t_1t_2=\frac{b^2+ab(k_1+k_2)t_0+a^2k_1k_2t_0^2}{bt_0^2-ab(k_1+k_2)t_0+a^2k_1k_2}.$$

代入直线

$$l_{BC}:\ a\,y(t_1+t_2)-b\,x(t_1t_2-1)=ab(t_1t_2+1),$$

再稍微化简一下，便有仿新齐次化：

$$l_{BC}:\ \frac{k_1k_2}{b^2}\left(\frac{xx_A}{a^2}-\frac{yy_A}{b^2}-1\right)-\frac{1}{a^2}\left(\frac{xx_A}{a^2}-\frac{yy_A}{b^2}+1\right)=\frac{k_1+k_2}{a^2b^2}(yx_A+xy_A).$$

除此上述的构造外，我们还能够：

$$(m-m_1)(m-m_2)=0\quad(m\text{ 为截距同构}),\qquad(|OA|-|CA|)(|OA|-|BA|)=0\quad(\text{弦长同构}),$$

等等，根据题意需要来同构构造。注意：一般最为常用的还是直线同构！

## 7.2 中点、弦长运用

**中点与弦长公式**

在前几章提到中点坐标公式：
椭圆上两点参数分别为 $t_1,t_2$ 时，中点为

$$\left(\frac{a(1-t_1^2t_2^2)}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2},\ \frac{b(t_1+t_2)(1+t_1t_2)}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2}\right).$$

这个结构代入同构三角

$$t_1+t_2=\frac{2b}{m-ak},\qquad t_1t_2=\frac{m+ak}{m-ak},$$

便有中点

$$\left(-\frac{a^2km}{b^2+a^2k^2},\ \frac{b^2m}{b^2+a^2k^2}\right).$$

弦长（椭圆）：

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{2a|t_1^2-t_2^2|}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2}\right|.$$

同样代入同构三角可得

$$|AB|=\frac{2ab\sqrt{(1+k^2)(b^2+a^2k^2-m^2)}}{b^2+a^2k^2}.$$

或用 $t$ 表示：

$$|AB|=\frac{2|t_1-t_2|\sqrt{b^2(t_1t_2-1)^2+a^2(t_1+t_2)^2}}{(t_1+t_2)^2+(t_1t_2-1)^2}.$$

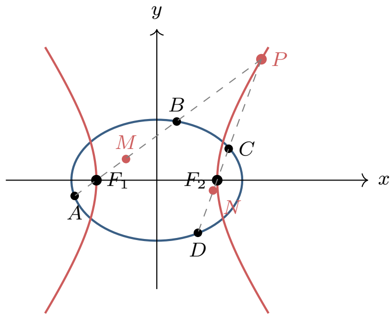
双曲线同样操作即可！

**例题 30：2025年天星教育金考卷优秀模拟试卷汇编45套（新高考）高中数学全册通用版**

已知双曲线 $C_1: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 经过椭圆 $C_2: \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 的左、右焦点 $F_1, F_2$，设 $C_1, C_2$ 的离心率分别为 $e_1, e_2$，且 $e_1e_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

1. 求 $C_1, C_2$ 的方程；
2. 设 $P$ 为 $C_1$ 上一点，且在第一象限内。若直线 $PF_1$ 与 $C_2$ 交于 $A, B$ 两点，直线 $PF_2$ 与 $C_2$ 交于 $C, D$ 两点。设 $AB, CD$ 的中点分别为 $M, N$，记直线 $MN$ 的斜率为 $k$，当 $k$ 取最小值时，求点 $P$ 的坐标。

**解：**




**(1)**

$$C_1:\ x^2-\frac{y^2}{2}=1,\qquad C_2:\ \frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

**(2)** 可设

$$A\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\ B\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),\ C\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{2t_3}{1+t_3^2}\right),\ D\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_4^2)}{1+t_4^2},\frac{2t_4}{1+t_4^2}\right)$$

取

$$l_{AB}: y=k_1x+m_1,\ 过\ F_1(-1,0)\Rightarrow m_1=k_1;\qquad l_{CD}: y=k_2x+m_2,\ 过\ F_2(1,0)\Rightarrow m_2=-k_2.$$

由同构三角：

$$t_1+t_2=\frac{2}{m_1-\sqrt{2}\,k_1},\quad t_1t_2=\frac{m_1+\sqrt{2}\,k_1}{m_1-\sqrt{2}\,k_1};\qquad t_3+t_4=\frac{2}{m_2-\sqrt{2}\,k_2},\quad t_3t_4=\frac{m_2+\sqrt{2}\,k_2}{m_2-\sqrt{2}\,k_2}.$$

中点

$$M=\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_1^2t_2^2)}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2},\frac{(t_1+t_2)(t_1t_2+1)}{(t_1t_2-1)^2+(t_1+t_2)^2}\right)=\left(-\frac{2k_1^2}{2k_1^2+1},\frac{k_1}{2k_1^2+1}\right).$$

同理

$$N=\left(\frac{2k_2^2}{2k_2^2+1},-\frac{k_2}{2k_2^2+1}\right).$$

设

$$P\left(\frac{1+t_0^2}{1-t_0^2},\frac{2\sqrt{2}\,t_0}{1-t_0^2}\right),\qquad F_1(-1,0),\ F_2(1,0),$$

则

$$k_1=k_{PF_1}=\sqrt{2}\,t_0,\qquad k_2=k_{PF_2}=\frac{\sqrt{2}}{t_0}.$$

从而

$$M\left(-\frac{4t_0^2}{1+4t_0^2},\frac{\sqrt{2}\,t_0}{1+4t_0^2}\right),\qquad N\left(\frac{4}{4+t_0^2},-\frac{\sqrt{2}\,t_0}{4+t_0^2}\right).$$

于是

$$k_{MN} = -\frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{t_0(1+t_0^2)}{t_0^4+8t_0^2+1} = -\frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{Q+\frac{6}{Q}}, \qquad Q = t_0 + \frac{1}{t_0} \geq 2.$$

因此

$$k_{MN} \geq -\frac{5\sqrt{3}}{24},$$

当且仅当 $t_0 + \dfrac{1}{t_0} = \sqrt{6}$ 时取等。

令

$$x = \frac{1}{t_0} - t_0$$

则

$$x^2 = \left(t_0 + \frac{1}{t_0}\right)^2 - 4 = 6 - 4 = 2 \ \Rightarrow \ x = \sqrt{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1+t_0^2}{1-t_0^2}, \frac{2\sqrt{2}\,t_0}{1-t_0^2}\right) &= \left(\frac{t_0+\frac{1}{t_0}}{\frac{1}{t_0}-t_0}, \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{t_0}-t_0}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{3},\, 2). \end{aligned}$$

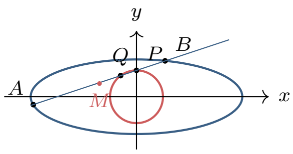
注意：$P$ 在第一象限，$t_0 \in (0,1)$，需舍去一些不满足的根！

**例题 31：网络试题**

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 和圆 $O:x^2+y^2=r^2$，当椭圆 $E$ 与圆 $O$ 恰好只有两个交点时，$r=\sqrt{2}$ 或 4。

1. 求椭圆 $E$ 的方程；
2. 当 $r=1$ 时，设直线 $l:y=kx+1$ 与圆 $O$ 交于 $P,Q$ 两点，与椭圆 $E$ 交于 $A,B$ 两点，且点 $Q$ 不在 $y$ 轴上。
   (i) 若 $Q$ 为 $AB$ 中点，求 $k$；
   (ii) 求 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值。

**解：**




**(1)**

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1.$$

**(2)** 圆 $O:x^2+y^2=1$。可设

$$A\left(\frac{4(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2\sqrt{2}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\ B\left(\frac{4(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2\sqrt{2}\,t_2}{1+t_2^2}\right),\ P\left(\frac{1-t_3^2}{1+t_3^2},\frac{2t_3}{1+t_3^2}\right),\ Q\left(\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2},\frac{2t_4}{1+t_4^2}\right).$$

由 $P(0,1)$ 得 $t_3=1$。取 $l_{AB}:y=kx+m$，$l_{PQ}:y=kx+b$，均过 $P(0,1)$，故 $b=m=1$。
由同构三角：

$$t_1+t_2=\frac{2\sqrt{2}}{1-4k},\qquad t_1t_2=\frac{1+4k}{1-4k};\qquad t_3t_4=\frac{1+k}{1-k}\Rightarrow t_4=\frac{1+k}{1-k}.$$

从而

$$Q\left(-\frac{2k}{1+k^2},\frac{1-k^2}{1+k^2}\right).$$

取 $AB$ 中点为

$$M\left(\frac{4(1-t_1^2t_2^2)}{(t_1+t_2)^2+(t_1t_2-1)^2},\frac{\sqrt{2}\,(t_1+t_2)(1+t_1t_2)}{(t_1+t_2)^2+(t_1t_2-1)^2}\right)=\left(-\frac{8k}{1+8k^2},\frac{1}{1+8k^2}\right).$$

由 $x_Q=x_M$ 得

$$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**(ii)**

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OQ}=2(x_Mx_Q+y_My_Q)=\frac{2(15k^2+1)}{(1+8k^2)(1+k^2)}.$$

令 $t=15k^2+1$，则

$$\frac{2(15k^2+1)}{(1+8k^2)(1+k^2)}=\frac{450t}{8t^2+119t+98}=\frac{450}{8t+119+\frac{98}{t}}\le\frac{18}{7}.$$

当且仅当 $t=\dfrac{7}{2}$ 时取等，即

$$15k^2+1=\frac{7}{2}\ \Rightarrow\ k^2=\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ k=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

**例题 32：网络试题**

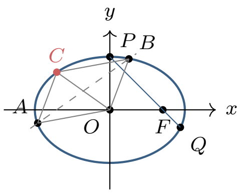
在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆

$$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

的右焦点为 $F$，上顶点为 $P$，短轴长为 2。直线 $PF$ 与椭圆 $E$ 的另一个交点为 $Q$，且 $\triangle POF$ 的面积是 $\triangle QOF$ 的面积的 3 倍。

1. 求椭圆 $E$ 的方程；
2. 直线 $l:y=kx+m\ (k>0)$ 与椭圆 $E$ 交于点 $A,B$，若椭圆 $E$ 上存在点 $C$ 使得四边形 $OACB$ 为平行四边形。
   (i) 求 $m$ 的取值范围；
   (ii) 若 $AB=\sqrt{3}\,OC$，求 $k$ 的值。

**解：**




**(1)**

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

**(2)** 设

$$A\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),$$

直线 $l_{AB}:y=kx+m$。代入得对 $t=t_1,t_2$ 均满足

$$t^2(m-\sqrt{2}\,k)-2t+(m+\sqrt{2}\,k)=0.$$

判别式

$$\Delta=4(1+2k^2-m^2)>0\ \Rightarrow\ 2k^2+1>m^2. \tag{1}$$

并且

$$t_1+t_2=\frac{2}{m-\sqrt{2}\,k},\qquad t_1t_2=\frac{m+\sqrt{2}\,k}{m-\sqrt{2}\,k}.$$

由平行四边形 $OACB$ 可得

$$\overrightarrow{OC}=(x_A+x_B,\ y_A+y_B)\Rightarrow C\left(-\frac{4km}{1+2k^2},\frac{2m}{1+2k^2}\right).$$

代入椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$$4m^2=1+2k^2. \tag{2}$$

联立 (1)(2) 可得

$$m\in(-\infty,-\tfrac{1}{2})\cup(\tfrac{1}{2},+\infty).$$

**(ii)**

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|.$$

并且

$$|x_A - x_B| = \frac{2\sqrt{2}\,|t_1+t_2|\,|t_1-t_2|}{(t_1+t_2)^2+(t_1t_2-1)^2} = \sqrt{\frac{6}{1+2k^2}}.$$

若 $AB = \sqrt{3}\,OC$，则

$$|AB| = \sqrt{3}\,|OC| \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{6(1+k^2)}{2k^2+1}} = \sqrt{\frac{3(4k^2+1)}{2k^2+1}} \Longrightarrow k^2 = \frac{1}{2}.$$

由 $k>0$，得

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

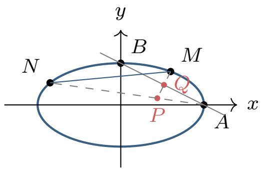
**例题 33：2025年辽宁模拟**

1. 已知椭圆
$$C:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$
$A(2,0),B(0,1)$分别为椭圆$C$的右顶点和上顶点，过椭圆$C$上的一点$M$（异于点$A,B$）且斜率为2的直线与直线$AB$交于点$Q$，$\overline{MQ}=\overline{QP}$，直线$AP$与椭圆的另一个交点为$N$。

   (1) 求$C$的方程；

   (2) 证明：直线$MN$过定点。

**解：**




(1)
$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

(2) 设
$$M\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),\quad A\left(\frac{2(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{2t_3}{1+t_3^2}\right),$$
其中$t_3=0$。

令$k_1=k_{AM}$，$k_{BN}=k_{AN}$。由$AB\perp PM$且$\vec{MQ}=\vec{QP}$，$\Rightarrow AB$为$\angle MAP$的角平分线$\Rightarrow \angle MAB=\angle NAB$。

由倒角公式：
$$\frac{k_{AB}-k_1}{1+k_{AB}k_1}=\frac{k_2-k_{AB}}{1+k_2k_{AB}}\Rightarrow 4k_1k_2-3(k_1+k_2)=4.$$

由
$$k^2-k(k_1+k_2)+k_1k_2=0,$$

代入$k=-\dfrac{1}{2t_i}\ (i=1,2)$：
$$4t_i^2k_1k_2+2t_i(k_1+k_2)+1=0\Rightarrow t_1+t_2=\frac{-2(k_1+k_2)}{4k_1k_2},\quad t_1t_2=\frac{1}{4k_1k_2}.$$

由$4k_1k_2-3(k_1+k_2)=4$，把$t_1+t_2$，$t_1t_2$代入
$$l_{MN}:\ 2y(t_1+t_2)-x(t_1t_2-1)=2(t_1t_2+1)$$

中，得
$$l_{MN}:\ (k_1+k_2)(3x-4y-6)+3x-10=0\Rightarrow \text{过}\left(\frac{10}{3},1\right).$$

**注：**本题也可正常由顶点三角书写，我只是想展示一下斜率同构。

## 7.3 解点与旋转三角的融合

**解点与旋转方法**

**核心思想：** 已知一个点，根据条件，把另一个点坐标解出来。
**例：**

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\quad \text{过 } (-1,0) \text{ 的 } l_{AB}.$$

$A(x_0,y_0)$，则用$x_0,y_0$表示$B$点坐标。
设

$$l_{AB}:y=kx+m,\ \text{过}(-1,0)\Rightarrow m=k.$$

取$AB$中点为$M$，有

$$t_1+t_2=\frac{2\sqrt{3}}{m-2k},\qquad t_1t_2=\frac{m+2k}{m-2k}.$$

从而

$$M\left(-\frac{4k^2}{3+4k^2},\frac{3k}{3+4k^2}\right).$$

由$k=\dfrac{y_0}{x_0+1}$代入$M$坐标中：

$$M\left(\frac{x_0^2-4}{2x_0+5},\frac{y_0(x_0+1)}{2x_0+5}\right).$$

由

$$\begin{cases}x_0+x_B=2x_M,\\ y_0+y_B=2y_M,\\ \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1,\end{cases}\quad\Rightarrow B\left(\frac{-5x_0-8}{2x_0+5},\frac{-3y_0}{2x_0+5}\right).$$

至此解点完成。
会有人会发现，这和"统一变量"那章节思想相同，其用$t_1$或$t_2$表示$B$点坐标。而解点用$x_0,y_0$虽然一样，但前者精度高，易让计算量增大；后者精度低，但也有一定的计算，相比前者计算轻松，更直观！
知识具有联系性，前一章学习的旋转三角，在这一章也可以一起使用！

**例题 34：第一届形影杯**

题目：已知椭圆

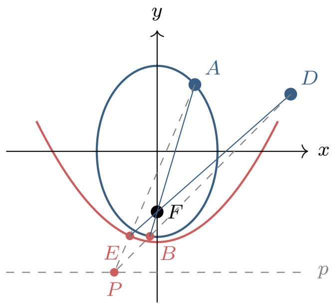
$$\Omega:\ \frac{y^2}{2}+x^2=1,$$

下准线为$l$，下焦点为$F$；抛物线$\Gamma$的准线为$l_1$，焦点为$F_1$。 $A$是$\Omega$上的动点，$D$是$\Gamma$上的动点（$A,D$在$y$轴异侧）。$DF$交$\Gamma$于$E$，$AF$交$\Omega$于$B$，$DB$与$AE$的交点为点$P$。

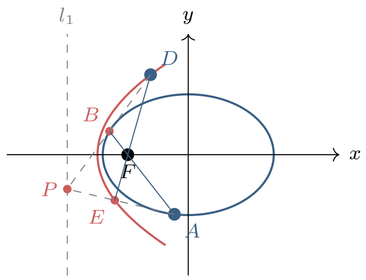
(1) 求$\Gamma$的标准方程；

(2) 证明：$DB$与$AE$的交点在定直线上。

**解：**




旋转前




旋转后

(1)

$$x^2=2y+3.$$

(2) 将$\Gamma$顺时针旋转$90°$，得

$$\Gamma':\ y^2=2x+3,\qquad \Omega':\ \frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

可以设

$$A\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{\sqrt{2}(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),$$

$$D\left(\frac{t_3^2-3}{2},t_3\right),\quad E\left(\frac{t_4^2-3}{2},t_4\right).$$

由同构三角：

$$t_1+t_2=\frac{2}{m_1-\sqrt{2}\,k_1},\qquad t_1t_2=\frac{m_1+\sqrt{2}\,k_1}{m_1-\sqrt{2}\,k_1},\qquad t_3+t_4=\frac{2}{k_2},\qquad t_3t_4=-1.$$

又

$$l_{AB}:y=k_1x+m_1,\quad l_{DE}:y=k_2x+m_2,$$

均过$(-1,0)\Rightarrow k_1=m_1$，$k_2=m_2$。

则

$$x_A+x_B=-\frac{4k_1^2}{1+2k_1^2},\qquad y_A+y_B=\frac{2k_1}{1+2k_1^2},$$

以及

$$x_E+x_D=\frac{2}{k_2^2}-2,y_E+y_D=\frac{2}{k_2},k_1=\frac{y_A}{x_A+1},k_2=\frac{y_E}{x_E+1}$$

此时

$$B\left(-\frac{4+3x_A}{3+2x_A},-\frac{y_A}{3+2x_A}\right),\qquad D\left(-\frac{4+3x_E}{3+2x_E},-\frac{1}{y_E}\right).$$

并写

$$\begin{cases} l_{AE}: y = k_{AE}x + m_{AE}, \\ l_{BD}: y = k_{BD}x + m_{BD}. \end{cases}$$

可得

$$k_{BD} = \frac{(y_A y_E - 2x_A - 3)(2x_E + 3)}{y_E(x_A - x_E)}, \qquad k_{AE} = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E}.$$

取$l_{BD}$与$l_{AE}$交点为$P$，则

$$x_P = \frac{m_{BD} - m_{AE}}{k_{AE} - k_{BD}} = \frac{-(8x_E + 12)(x_A + 1) + 4y_A y_E(1 + x_E)}{(4x_E + 6)(x_A + 1) - 2y_A y_E(1 + x_E)} = -2.$$

若旋转回去，交于$y = 2$上。

**例题 35：网络试题**

已知双曲线

$$C:\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$$

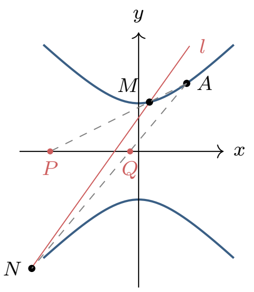
的离心率为$\sqrt{2}$，点$A(\sqrt{2},2)$在$C$上，直线$l:\ y=kx+1$与$C$的上、下两支分别交于点$M,N$（异于点$A$）。

(1) 求$C$的方程；

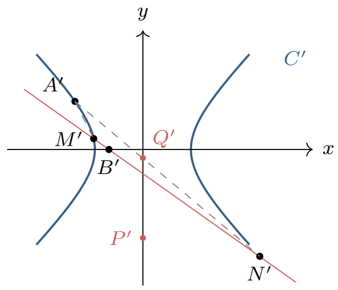
(2) 若直线$AM,AN$的斜率均存在且不为0，求直线$AM,AN$的斜率的倒数之和；

(3) 设直线$AM,AN$分别交$x$轴于$P,Q$两点，若$M,N,P,Q$四点共圆，求直线$l$的方程。

**解：**



旋转前



旋转后

(1)

$$y^2-x^2=2.$$

(2) 将$C$逆时针旋转$90°$，得

$$C':\ x^2-y^2=2.$$

$B(0,1)\to B'(-1,0)$，$A(\sqrt{2},2)\to A'(-2,\sqrt{2})$。

可设

$$M\left(\frac{\sqrt{2}(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\frac{2t_1}{1-t_1^2}\right),\quad N\left(\frac{\sqrt{2}(1+t_2^2)}{1-t_2^2},\frac{2t_2}{1-t_2^2}\right),\quad A\left(\frac{\sqrt{2}(1+t_0^2)}{1-t_0^2},\frac{2t_0}{1-t_0^2}\right),$$

其中$t_0=-(\sqrt{2}+1)$。

由旋转$90°$性质：$k\cdot k'=-1$，从而

$$\frac{1}{k_{AM}}+\frac{1}{k_{AN}}=-(k'_{AM}+k'_{AN})=-\frac{(t_0+t_1)(t_0+t_2)+2t_0(t_1+t_2)+2t_1t_2+1}{t_0^2+t_0(t_1+t_2)+t_1t_2}.$$

设

$$l_{MN}:y=kx+m,\ \text{过}\ B'(-1,0)\Rightarrow k=m.$$

由同构三角：

$$t_1+t_2=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,k-m},\qquad t_1t_2=\frac{\sqrt{2}\,k+m}{\sqrt{2}\,k-m},$$

代入上式中，得

$$\text{原式}=\frac{(\sqrt{2}+1)(4\sqrt{2}\,k-8)}{(\sqrt{2}+1)(2k-2\sqrt{2})}=2\sqrt{2}.$$

(3) 设

$$l_{MN}:y=k(x+1).$$

令$x=0\Rightarrow y=k$，记$O(0,k)$，$P(0,y_P)$，$Q(0,y_Q)$。

$$\begin{cases} l_{AM}: y = k'_{AM}(x+2)+\sqrt{2}, \\ l_{AN}: y = k'_{AN}(x+2)+\sqrt{2}, \end{cases} \qquad x=0 \Rightarrow \begin{cases} y_P = 2k'_{AM}+\sqrt{2}, \\ y_Q = 2k'_{AN}+\sqrt{2}. \end{cases}$$

由(2)得

$$k'_{AM}+k'_{AN}=-2\sqrt{2}.$$

则

$$y_P+y_Q=-2\sqrt{2},$$

$$y_Qy_P = 4k'_{AM}k'_{AN}-6 = 4\cdot\frac{t_0t_1t_2+t_0(t_1+t_2)+1}{t_0^2+t_0(t_1+t_2)+t_1t_2}-6=\frac{6k+2\sqrt{2}}{k-\sqrt{2}}.$$

且

$$x_Mx_N=\frac{2\left[(t_1+t_2)^2+(t_1t_2-1)^2\right]}{(t_1+t_2)^2-(t_1t_2-1)^2}=\frac{k^2+2}{k^2-1}.$$

由圆幂定理：

$$|OM|\cdot|ON|=|OP|\cdot|OQ| \Rightarrow (k^2+1)\cdot|x_Mx_N| = \left|y_Py_Q-k(y_P+y_Q)+k^2\right|.$$

$$\Rightarrow \frac{(k^2+2)(k^2+1)}{k^2-1}=\frac{(k^2+2)(k+\sqrt{2})}{k-\sqrt{2}} \Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

方程旋转回去：$k=-\sqrt{2}$。则

$$l_{MN}: y=-\sqrt{2}\,x+1.$$

## 7.4 切线同构

### 切线同构

从上篇的直线同构，还可以延伸出切线同构。一般的切线同构有两种：

1. 过曲线外一点，作曲线的两条切线；
2. 过曲线上两点，作另一曲线的切线。

**例（第一种）：** 过曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

外一点$P$作两条切线，切曲线于$A,B$两点，求$P$的坐标。
可设

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\qquad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right),$$

有

$$l_{AB}:\ \frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1,$$

代入$A,B$坐标，得

$$t_2^2(ab+bx_P)-2ay_Pt_2+ab-bx_P=0\Rightarrow t_1+t_2=\frac{2ay_P}{ab+bx_P},\quad t_1t_2=\frac{a-x_P}{a+x_P}.$$

可解得

$$P\left(\frac{a(1-t_1t_2)}{1+t_1t_2},\frac{b(t_1+t_2)}{1+t_1t_2}\right).$$

同样的也可推到：

$$l_{AB}:\ ay(t_1+t_2)-bx(t_1t_2-1)=ab(t_1t_2+1)$$

即

$$l_{AB}:\ y\cdot\frac{t_1+t_2}{b(t_1t_2+1)}+x\cdot\frac{1-t_1t_2}{a(t_1t_2+1)}=1,$$

与$\frac{xx_P}{a^2}+\frac{yy_P}{b^2}=1$对比可得$P$坐标。

**例（第二种）：** 过曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

上两点，作曲线

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

的切线。
先设曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上$A,B$两点：

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right).$$

再设曲线$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$上的切点

$$C\left(\frac{A(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\frac{2Bt_0}{1+t_0^2}\right).$$

由切线方程

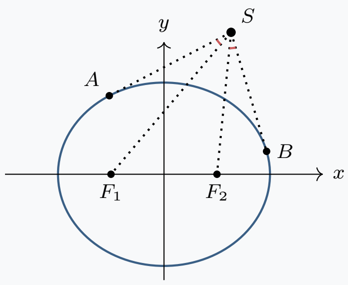
$$\frac{xx_C}{A^2}+\frac{yy_C}{B^2}=1$$

代入$A,B$坐标，便可得到$t_1+t_2$，$t_1t_2$与$t_0$的关系式。

## 彭赛列小定理

**定理内容**　过以$F_1,F_2$为焦点的椭圆外任意一点$S$向椭圆作切线，切点分别为$A,B$，则

$$\angle F_1SA=\angle F_2SB.$$




**证明：**
不妨设

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\quad B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right).$$

设

$$l_{AB}:\ \frac{xx_s}{a^2}+\frac{yy_s}{b^2}=1,$$

代入

$$\left(\frac{a(1-t_i^2)}{1+t_i^2},\frac{2bt_i}{1+t_i^2}\right),\ i=1,2,$$

得

$$t_i^2(ab+bx_s)-2ay_st_i+ab-bx_s=0\Rightarrow t_1+t_2=\frac{2ay_s}{ab+bx_s},\quad t_1t_2=\frac{a-x_s}{a+x_s}.$$

因此

$$S\left(\frac{a(1-t_1t_2)}{1+t_1t_2},\frac{b(t_1+t_2)}{1+t_1t_2}\right).$$

由切线方程

$$k_{AS}=\frac{b}{2a}\cdot\frac{t_1^2-1}{t_1},\qquad k_{SF_1}=\frac{b(t_1+t_2)}{a+c+t_1t_2(c-a)}.$$

于是

$$\tan\angle F_1SA=\left|\frac{k_{SA}-k_{SF_1}}{1+k_{SA}k_{SF_1}}\right|=\left|\frac{(1+t_1t_2)\left[t_1^2(c-a)-(a+c)\right]}{\left[(a+c)t_1+t_2(c-a)\right]\left[t_1^2(a-c)+a+c\right]}\right|=\frac{b|1+t_1t_2|}{(a+c)t_1+t_2(c-a)}.$$

同理：

$$\tan\angle F_2SB=\frac{b|1+t_1t_2|}{(a+c)t_1+t_2(c-a)}.$$

故

$$\angle F_1SA=\angle F_2SB.\qquad \text{QED!}$$

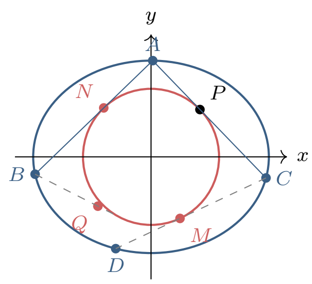
**例题 36：kuing论坛**

$P$为圆$O: x^2+y^2=1$上一动点，圆$O$在点$P$处切线交椭圆

$$C: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$$

于$A,C$两点，再过点$A,C$作圆$O$的另一条切线分别交椭圆$C$于点$B,D$两点，过点$B,D$作圆$O$的另一条切线相交于点$Q$，求动点$Q$的轨迹方程。

**解：**




可以设切点

$$P\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2},\frac{2t_1}{1+t_1^2}\right),\ M\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2},\frac{2t_2}{1+t_2^2}\right),\ N\left(\frac{1-t_3^2}{1+t_3^2},\frac{2t_3}{1+t_3^2}\right),$$
$$K\left(\frac{1-t_4^2}{1+t_4^2},\frac{2t_4}{1+t_4^2}\right),\ J\left(\frac{1-t_5^2}{1+t_5^2},\frac{2t_5}{1+t_5^2}\right).$$

$P$为$l_{AC}$切点，$M$为$l_{CD}$切点，$N$为$l_{AB}$切点，$K$为$l_{DQ}$切点，$J$为$l_{BQ}$切点。
由前文所述可得

$$A\left(\frac{1-t_1t_3}{1+t_1t_3},\frac{t_1+t_3}{1+t_1t_3}\right),\quad C\left(\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2},\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2}\right),$$
$$B\left(\frac{1-t_3t_5}{1+t_3t_5},\frac{t_3+t_5}{1+t_3t_5}\right),\quad D\left(\frac{1-t_2t_4}{1+t_2t_4},\frac{t_2+t_4}{1+t_2t_4}\right),$$

以及

$$Q\left(\frac{1-t_4t_5}{1+t_4t_5},\frac{t_4+t_5}{1+t_4t_5}\right).$$

由题意知$A,B,C,D$均在椭圆上，代入可得

$$4t_1^2t_3^2-3t_1^2-3t_3^2+10t_1t_3+4=0,$$
$$4t_1^2t_2^2-3t_1^2-3t_2^2+10t_1t_2+4=0.$$

$t_2,t_3$为

$$4t_1^2t^2-3t_1^2-3t^2+10t_1t+4=0$$

的两根，从而

$$t_2+t_3=\frac{-10t_1}{4t_1^2-3},\qquad t_2t_3=\frac{4-3t_1^2}{4t_1^2-3}.$$

同理

$$t_1+t_5=\frac{-10t_3}{4t_3^2-3},\quad t_1t_5=\frac{4-3t_3^2}{4t_3^2-3},$$

以及

$$t_1+t_4=\frac{-10t_2}{4t_2^2-3},\quad t_1t_4=\frac{4-3t_2^2}{4t_2^2-3}.$$

联立这三个式子可得

$$t_4t_5=\frac{1200-49t_1^2}{1200t_1^2-49},\qquad t_4+t_5=\frac{-2402t_1}{1200t_1^2-49}.$$

代入$Q$坐标

$$Q\left(\frac{-1249(1-t_1^2)}{1151(1+t_1^2)},\frac{-1201\cdot 2t_1}{1151(1+t_1^2)}\right).$$

又$P$在$x^2+y^2=1$上，因此

$$Q\text{ 一定在 }\frac{x^2}{\left(\frac{1249}{1151}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1201}{1151}\right)^2}=1.$$

**技巧点拨**

[点拨] 此题若不联立三个式子，还可以：

$$t_1t_5+\frac{3}{4}=\frac{\frac{7}{4}}{4t_3^2-3},\qquad t_1t_5+\frac{4}{3}=\frac{\frac{7}{3}t_1^2}{4t_3^2-3},$$

则有

$$(t_1+t_5)^2=\frac{1200}{49}\left(t_1t_5+\frac{4}{3}\right)\left(t_1t_5+\frac{3}{4}\right).$$

$\Rightarrow$

$$t_5^2(1200t_1^2-49)+2402t_1t_5+1200-49t_1^2=0.$$

同理：

$$t_4^2(1200t_1^2-49)+2402t_1t_4+1200-49t_1^2=0.$$

$t_4,t_5$为

$$t^2(1200t_1^2-49)+2402t_1t+1200-49t_1^2=0$$

的两个根。

$$\Rightarrow\quad t_4+t_5=\frac{-2402t_1}{1200t_1^2-49},\qquad t_4t_5=\frac{1200-49t_1^2}{1200t_1^2-49}.$$

这也是比较基础的配凑同构思想

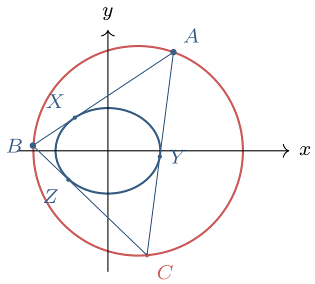
**例题 37：网络试题**

已知点$A$在圆$(x-c)^2+y^2=4a^2$上，以$A$作椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

的两条切线，交圆的另一点分别交于$B,C$两点，求证：$BC$与椭圆相切。

**证明：**




设$x\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right)$ $y_2$ $z_3$，$x,y,z$ 均为切点. 反证：令$l_{BC}$与椭圆相切，则反需证$A$点在圆上！
由同构三角：

$$B\left(\frac{a(1-t_1t_3)}{1+t_1t_3},\frac{b(t_1+t_3)}{1+t_1t_3}\right),\quad C\left(\frac{a(1-t_2t_3)}{1+t_2t_3},\frac{b(t_2+t_3)}{1+t_2t_3}\right),\quad A\left(\frac{a(1-t_1t_2)}{1+t_1t_2},\frac{b(t_1+t_2)}{1+t_1t_2}\right).$$

$B,C$均在圆$(x-c)^2+y^2=4a^2$上，代入坐标

$$t_i^2\left[b^2+(c^2+2ac-3a^2)t_3^2\right]-8a^2t_3t_i+b^2t_3^2+c^2-2ac-3a^2=0,\quad i=1,2.$$

从而

$$t_1+t_2=\frac{8a^2t_3}{b^2+(c^2+2ac-3a^2)t_3^2},\qquad t_1t_2=\frac{b^2t_3^2+c^2-2ac-3a^2}{b^2+(c^2+2ac-3a^2)t_3^2}.$$

代入$A$的坐标中

$$A\left(\frac{(2a^2+ac-c^2)-(2a^2-ac-c^2)t_3^2}{(c-a)t_3^2-(a+c)},\frac{4abt_3}{(c-a)t_3^2-(a+c)}\right).$$

记$A(x_A,y_A)$，并令

$$P=2a^2+ac-c^2,\quad Q=2a^2-ac-c^2,\quad R=c-a,\quad S=a+c.$$

则

$$x_A=\frac{P-Qt_3^2}{Rt_3^2-S},\qquad y_A=\frac{4abt_3}{Rt_3^2-S}.$$

于是

$$Rt_3^2-S=\frac{RP-SQ}{Rx_A+Q}=\frac{-4ab^2}{Rx_A+Q},\qquad t_3=\frac{-by_A}{Rx_A+Q}.$$

$y^2$比对：

$$t_3^2=\frac{b^2y_A^2}{(Rx_A+Q)^2}=\frac{P+Sx_A}{Rx_A+Q}.$$

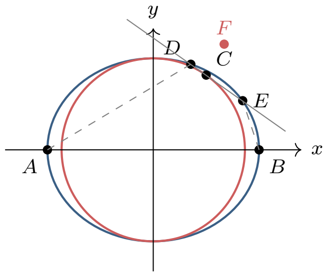
代入$P,Q,R,S$得

$$(x_A-c)^2+y_A^2=4a^2.\qquad \text{QED!}$$

**例题 38：昊天数学公众号题目**

已知椭圆
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,$$
圆$O:x^2+y^2=3$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C$为圆$O$上的一个动点，过点$C$作圆$O$的切线交椭圆于$D,E$两点，直线$AD$与直线$BE$交于点$F$，求动点$F$的轨迹方程。

**解：**




不妨设
$$C\left(\frac{\sqrt{3}(1-t_0^2)}{1+t_0^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_0}{1+t_0^2}\right),\ D\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right),\ E\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right).$$
易知$l_{DE}:xx_C+yy_C=3$。由切线同构：
$$t^2(3t_0^2-2\sqrt{3}\,t_0+3+2\sqrt{3})-12t_0t+3-2\sqrt{3}+3t_0^2+2\sqrt{3}\,t_0^2=0.$$
$$t_1t_2=\frac{t_0^2(3+2\sqrt{3})+3-2\sqrt{3}}{t_0^2(3-2\sqrt{3})+3+2\sqrt{3}},\qquad t_{1,2}=\frac{6t_0\pm\sqrt{3}\,|t_0^2-1|}{t_0^2(3-2\sqrt{3})+3+2\sqrt{3}}.$$
$$\begin{cases}l_{AD}:\ y=\dfrac{\sqrt{3}\,t_1}{2}(x+2),\\ l_{BE}:\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2t_2}(x-2),\end{cases}\Rightarrow F\left(\frac{2(1-t_1t_2)}{t_1t_2+1},\frac{2\sqrt{3}\,t_1}{t_1t_2+1}\right)=\left(\frac{4\sqrt{3}(1-t_0^2)}{3(t_0^2+1)},\frac{2\sqrt{3}\,t_0\pm|t_0^2-1|}{t_0^2+1}\right).$$
注意到
$$\left(\frac{2t_0}{1+t_0^2}\right)^2+\left(\frac{1-t_0^2}{1+t_0^2}\right)^2=1\iff A^2+B^2=1,$$
$$|B|=\frac{\sqrt{3}|x|}{4},\qquad y=\sqrt{3}\,A\pm|B|.$$
由此推出轨迹满足
$$3x^2\pm2\sqrt{3}\,|x|\,y+4y^2=12.$$

**例题 39：2023年全国教师基本功大赛**

设$O$为坐标原点，椭圆

$$C_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$

双曲线

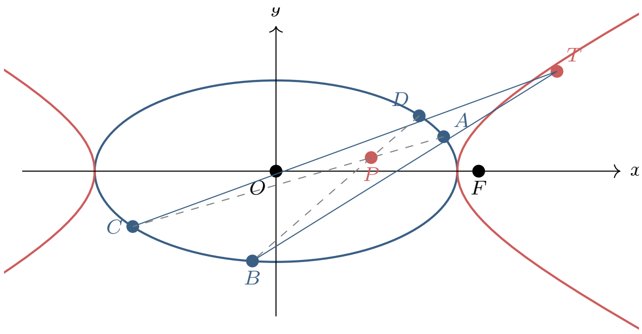
$$C_2:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上一点$T$的切线交$C_1$于$A,B$两点。直线$OT$交$C_1$于$C,D$两点，且$A,D$在$x$轴同侧。

(1) 设$F$为$C_2$右焦点，设直线$AF,BF$斜率分别为$k_1,k_2$，求$k_1\cdot k_2$取值范围。

(2) 设$AC$与$BD$交于点$P$，记$\triangle PAD,\triangle PBC$面积分别为$S_1,S_2$，求$|S_1-S_2|$最大值。

**解：**




**(1)**

不妨设

$$T\left(\frac{a(1+t_0^2)}{1-t_0^2},\frac{2bt_0}{1-t_0^2}\right),\ A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right),\ B\left(\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\frac{2bt_2}{1+t_2^2}\right),\ F(c,0).$$

我们易知（切线方程）

$$l_{AB}:\ \frac{xx_T}{a^2}-\frac{yy_T}{b^2}=1\implies y=\frac{b(1+t_0^2)}{2at_0}x+\frac{b(t_0^2-1)}{2t_0}\qquad(\star).$$

不妨代入

$$\left(\frac{a(1-t_i^2)}{1+t_i^2},\frac{2bt_i}{1+t_i^2}\right)\ \text{到}\ (\star)\ (i=1,2),$$

得

$$t_i^2+2t_0t_i-t_0^2=0\ \Rightarrow\ t_1+t_2=-2t_0,\quad t_1t_2=-t_0^2\qquad(1).$$

$$k_{AF}=\frac{2bt_1}{a-c-t_1^2(a+c)},\qquad k_{BF}=\frac{2bt_2}{a-c-t_2^2(a+c)}.$$

由(1)有$(t_1+t_2)^2=4t_0^2\Rightarrow t_1^2+t_2^2=6t_0^2$，则

$$\begin{aligned}k_{AF}\,k_{BF}&=\frac{4b^2t_1t_2}{(a-c)^2+b^2(t_1^2+t_2^2)+t_1^2t_2^2(a+c)^2}\\&=\frac{-4b^2t_0^2}{(a-c)^2+t_0^4(a+c)^2+6t_0^2b^2}\\&=\frac{-4b^2}{\frac{(a-c)^2}{t_0^2}+t_0^2(a+c)^2+6b^2}\geq\frac{-4b^2}{2b^2+6b^2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当$t_0^2\to+\infty$时，上式$\to 0$，故

$$k_{AF}\,k_{BF}\in\left[-\frac{1}{2},0\right).$$

当且仅当

$$t_0^2=\frac{c-a}{c+a}$$

时取等。

**(2)**

不妨再设

$$C\left(\frac{a(1-t_3^2)}{1+t_3^2},\frac{2bt_3}{1+t_3^2}\right),\quad D\left(\frac{a(1-t_4^2)}{1+t_4^2},\frac{2bt_4}{1+t_4^2}\right).$$

$l_{OT}=l_{CD}\Rightarrow l_{OT}:y=\dfrac{2bt_0}{a(1+t_0^2)}x$，将 $\left(\dfrac{a(1-t_j^2)}{1+t_j^2},\dfrac{2bt_j}{1+t_j^2}\right)$代入（$j=3,4$）：

$$t_0t_j^2+t_j(1+t_0^2)-t_0=0\Rightarrow t_3+t_4=-\frac{1+t_0^2}{t_0},\quad t_3t_4=-1. \qquad (2)$$

$$|S_{\triangle PAD}-S_{\triangle PBC}|=|S_{\triangle ACD}-S_{\triangle BCD}|=\frac{1}{2}|CD|\cdot\left|d_{A\to l_{CD}}-d_{B\to l_{CD}}\right|,$$

且

$$l_{CD}:\ a\,y(t_3+t_4)+2bx=0.$$

$$d_{A\to l_{CD}}=\frac{|ay_A(t_3+t_4)+2bx_A|}{\sqrt{a^2(t_3+t_4)^2+4b^2}},\quad d_{B\to l_{CD}}=\frac{|ay_B(t_3+t_4)+2bx_B|}{\sqrt{a^2(t_3+t_4)^2+4b^2}}.$$

$$\left|d_{A\to l_{CD}}-d_{B\to l_{CD}}\right|=\frac{2ab|t_2-t_1|}{\sqrt{a^2(t_3+t_4)^2+4b^2}}\left|\frac{(t_3+t_4)(t_1t_2-1)+2(t_1+t_2)}{1+t_1^2t_2^2+t_1^2+t_2^2}\right|.$$

$$|CD|=\frac{2\sqrt{4b^2+a^2(t_3+t_4)^2}}{|t_3-t_4|}.$$

从而原式化为

$$|S_{\triangle PAD}-S_{\triangle PBC}|=2ab\left|\frac{t_2-t_1}{t_3-t_4}\right|\left|\frac{(t_3+t_4)(t_1t_2-1)+2(t_1+t_2)}{1+t_1^2t_2^2+t_1^2+t_2^2}\right|.$$

结合(1)与(2)（给出：$t_1t_2=-t_0^2$，$t_1+t_2=-2t_0$，$t_1^2+t_2^2=6t_0^2$），进一步化简为

$$|S_{\triangle PAD}-S_{\triangle PBC}|=4\sqrt{2}\,ab\cdot\frac{t_0(t_0^2-1)^2}{(t_0^4+6t_0^2+1)^{3/2}}=4\sqrt{2}\,ab\cdot\frac{t^2}{(t^2+8)^{3/2}},$$

其中$t=t_0-\dfrac{1}{t_0}$。令$\alpha=t^2$，则

$$|S_{\triangle PAD}-S_{\triangle PBC}|=4\sqrt{2}\,ab\cdot\frac{\alpha}{(\alpha+8)^{3/2}}.$$

由不等式（见下页引理）得

$$\frac{\alpha}{(\alpha+8)^{3/2}}\le\frac{\sqrt{6}}{18},$$

故

$$|S_1-S_2|_{\max}=4\sqrt{2}\,ab\cdot\frac{\sqrt{6}}{18}=\frac{4\sqrt{3}\,ab}{9}.$$

当且仅当$t=\pm4$时取等。

**技巧点拨**

**不等式引理**：对于$x > 0, c > 0$，有

$$f(x) = \frac{x}{(x+c)^{3/2}} \leq \frac{2\sqrt{3c}}{9c}, \quad \text{当且仅当 } x = 2c \text{ 时取等。}$$

由三元均值：

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+c \geq 3\sqrt[3]{\frac{cx^2}{4}} \Rightarrow (x+c)^3 \geq \frac{27cx^2}{4}.$$

$$\Rightarrow (x+c)^{3/2} \geq \frac{3\sqrt{3c}\,x}{2} \Rightarrow \frac{x}{(x+c)^{3/2}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3c}} = \frac{2\sqrt{3c}}{9c}.$$

当且仅当$x = 2c$时取等！

# 附录 A　附录

## A.1　三角参数设点的书写过程

**椭圆参数设点推导**

**以椭圆为例**

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

上有 $A,B$ 两点，由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可设

$$A(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta),\qquad B(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha).$$

而

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$
$$\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

令 $t_1=\tan\frac{\theta}{2}$，则

$$A\left(\frac{2(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_1}{1+t_1^2}\right).$$

同理令 $t_2=\tan\frac{\alpha}{2}(t_1\neq t_2)$，则

$$B\left(\frac{2(1-t_2^2)}{1+t_2^2},\ \frac{2\sqrt{3}\,t_2}{1+t_2^2}\right).$$

**两点式推导**

此时已完成参数设点，而对两点式

$$k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{\sqrt{3}\,(t_1t_2-1)}{2(t_1+t_2)}.$$
$$l_{AB}:\ y=k_{AB}(x-x_A)+y_A$$

代入坐标，化简得：

$$l_{AB}:\ 2y(t_1+t_2)-\sqrt{3}\,x(t_1t_2-1)=2\sqrt{3}(t_1t_2+1).$$

同样的，也可以使用同构三角来书写。

## A.2　参数设点的多种形式

**多种参数设点形式**

这也是三角参数法的一个核心视角：**代数恒等式 + 几何变换**。
从代数恒等式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\qquad \sec^2\theta-\tan^2\theta=1,\qquad \csc^2\theta-\cot^2\theta=1$$

可以设点，再用万能公式 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 做半角有理化。例如在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,除$A(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$也可写成

$$A(\pm a\sin\theta,\ \pm b\cos\theta),\qquad A(\pm a\sin\theta,\ \mp b\cos\theta),$$

这些形式本质上都来自旋转变换与对称变换，始终满足椭圆方程。几何上要区分三件事：

$$(x,y)\mapsto(y,x)\ 是关于\ y=x\ 的对称,$$

$$(x,y)\mapsto(-y,x)\ 是逆时针\ 90^\circ\ 旋转,$$
$$(x,y)\mapsto(y,-x)\ 是顺时针\ 90^\circ\ 旋转.$$

因此

$$(a\cos\theta,b\sin\theta)\mapsto(a\sin\theta,b\cos\theta)$$

通常应理解为离心角基准改变（如 $\theta\mapsto\frac{\pi}{2}-\theta$），不直接等同于旋转；仅当 $a=b$（圆）时两者才完全等价。若用复数 $z=x+iy$ 统一记号，则

$$z\mapsto iz\iff(x,y)\mapsto(-y,x),\qquad z\mapsto i\bar{z}\iff(x,y)\mapsto(y,x).$$

这也解释了“换位”和“旋转”在本质上的区别。

**双曲换元**

由

$$\cosh^2x-\sinh^2x=1,\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

令 $t=e^x$，则有

$$\left(\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\right)^2-\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\right)^2=1.$$

如此双曲线便有了新的一种参数坐标，但因涉及双曲函数（属于大学内容，高中超纲），在高考答题中不易直接作为标准步骤使用。
但我们不难发现 “$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$” 使用万能公式转化一下：

$$\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^2-\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2=1,$$

与上述恒等式代数结构完全一致!

**欧拉公式解释**

我们根据欧拉公式，便可解释这些点：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

$$\cosh(i\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta,\qquad \sinh(i\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=i\sin\theta.$$

则有

$$\cosh^2(i\theta)-\sinh^2(i\theta)=1\iff\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$

再由 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 可推 “$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$”。
所以从代数小恒等式 “$\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$” 解决了双曲换元的合理性。
注：常常不使用该类参数设点，结构并不是很美观，使用人群不够多且仅可在双曲线上使用。

## A.3　双曲线参数方程与两点式

**双曲线参数方程与两点式**

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\qquad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

$\Rightarrow\ A\left(\frac{a}{2}\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right),\ \frac{b}{2}\left(t_1-\frac{1}{t_1}\right)\right)$。

故双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上任意一点都可以写成

$$A\left(\frac{a(t_1^2+1)}{2t_1},\ \frac{b(t_1^2-1)}{2t_1}\right).$$

如果

$$B\left(\frac{a}{2}\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right),\ \frac{b}{2}\left(t_2-\frac{1}{t_2}\right)\right)$$

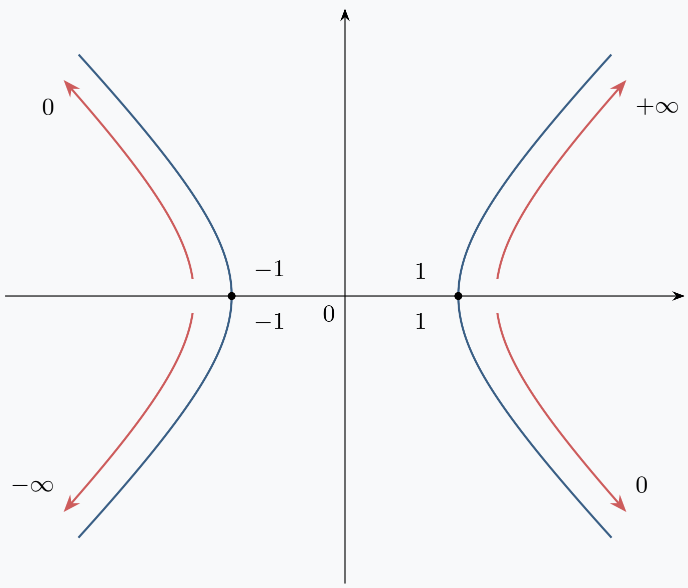
也在双曲线上，则有

$$k_{AB}=\frac{b(t_1t_2+1)}{a(t_1t_2-1)}.$$

两点式：

$$l_{AB}:\ a(t_1t_2-1)y-b(t_1t_2+1)x+ab(t_1+t_2)=0.$$

**参数 $t$ 的范围**




**证明：** 由双曲线 $E$ 的方程可得：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1,$$

令 $\begin{cases} t=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \\ \dfrac{1}{t}=\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} \end{cases}$，得：$\begin{cases} x=\dfrac{a(t^2+1)}{2t} \\ y=\dfrac{b(t^2-1)}{2t} \end{cases}$。

设点 $A\left(\dfrac{a(t_1^2+1)}{2t_1},\dfrac{b(t_1^2-1)}{2t_1}\right)$、$B\left(\dfrac{a(t_2^2+1)}{2t_2},\dfrac{b(t_2^2-1)}{2t_2}\right)$，则

$$k_{AB}=\frac{\dfrac{b(t_2^2-1)}{2t_2}-\dfrac{b(t_1^2-1)}{2t_1}}{\dfrac{a(t_2^2+1)}{2t_2}-\dfrac{a(t_1^2+1)}{2t_1}}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1+t_1t_2}{1-t_1t_2}.$$

所以直线 $AB$：

$$y-\frac{b(t_1^2-1)}{2t_1}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1+t_1t_2}{1-t_1t_2}\left(x-\frac{a(t_1^2+1)}{2t_1}\right)\Rightarrow b(1+t_1t_2)x+a(1-t_1t_2)y=ab(t_1+t_2).$$

故直线 $AB$ 的**两点式代数参数方程**为 $b(1+t_1t_2)x+a(1-t_1t_2)y=ab(t_1+t_2)$。

- **推论 1**：直线 $AB$ 的斜率为 $-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1+t_1t_2}{1-t_1t_2}$。
- **推论 2**：若点 $A,B$ 关于 $y$ 轴对称，则 $t_1t_2=-1$。
- **推论 3**：若点 $A,B$ 关于 $x$ 轴对称，则 $t_1t_2=1$。
- **推论 4**：若点 $A,B$ 关于原点对称，则 $t_1+t_2=0$。
- **推论 5**：双曲线 $E$ 上点 $A,B$ 处的切线的交点为 $T\left(\dfrac{a(1+t_1t_2)}{t_1+t_2},\dfrac{b(1-t_1t_2)}{t_1+t_2}\right)$。
- **推论 6**：弦长 $|AB|=\dfrac{|t_2-t_1|\sqrt{a^2(t_1t_2-1)^2+b^2(t_1t_2+1)^2}}{2|t_1t_2|}$。
- **推论 7**：线段 $AB$ 的中点 $T\left(\dfrac{a(t_1t_2+1)(t_1+t_2)}{4t_1t_2},\dfrac{b(t_1t_2-1)(t_1+t_2)}{4t_1t_2}\right)$。

## A.4 双曲线动点构造问题

**例题：2024全国二卷**

已知双曲线 $C:\ x^2-y^2=m\ (m>0)$，点 $P_1(5,4)$ 在 $C$ 上，$k$ 为常数，$0<k<1$。按照如下公式依次构造点 $P_n\ (n=2,3,\ldots)$：过点 $P_{n-1}$ 作斜率为 $k$ 的直线与 $C$ 的左支点交于点 $Q_{n-1}$，令 $P_n$ 为 $Q_{n-1}$ 关于 $y$ 轴的对称点，记 $P_n$ 的坐标为 $(x_n,y_n)$。

(1) 证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

(2) 设 $S_n$ 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对于任意正整数 $n$，$S_n=S_{n+1}$。

**解析**

**(1) 解法一**

设点

$$P_n\left(\frac{3(t_n^2+1)}{2t_n},\ \frac{3(t_n^2-1)}{2t_n}\right),\quad P_{n+1}\left(\frac{3(t_{n+1}^2+1)}{2t_{n+1}},\ \frac{3(t_{n+1}^2-1)}{2t_{n+1}}\right),$$
$$Q_n\left(-\frac{3(t_{n+1}^2+1)}{2t_{n+1}},\ \frac{3(t_{n+1}^2-1)}{2t_{n+1}}\right).$$

要证数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列，即证数列 $\left\{\dfrac{3}{t_n}\right\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

$$\because\ k=\frac{\dfrac{3(t_n^2-1)}{2t_n}-\dfrac{3(t_{n+1}^2-1)}{2t_{n+1}}}{\dfrac{3(t_n^2+1)}{2t_n}+\dfrac{3(t_{n+1}^2+1)}{2t_{n+1}}}=\frac{(1+t_nt_{n+1})(t_n-t_{n+1})}{(1+t_nt_{n+1})(t_n+t_{n+1})}=\frac{t_n-t_{n+1}}{t_n+t_{n+1}}$$

$$\Rightarrow (1-k)t_n = (1+k)t_{n+1}.$$

$$\therefore \frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{\dfrac{3}{t_{n+1}}}{\dfrac{3}{t_n}} = \frac{1+k}{1-k} \Rightarrow \text{数列} \left\{\frac{3}{t_n}\right\} \text{是公比为} \frac{1+k}{1-k} \text{的等比数列。}$$

故数列 $\{x_n - y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列。

---

**(2) 解法一**

由题意可知，要证 $S_n = S_{n+1}$，即证 $k_{P_nP_{n+3}} = k_{P_{n+1}P_{n+2}}$。

设点

$$P_n\left(\frac{3(t_n^2+1)}{2t_n}, \frac{3(t_n^2-1)}{2t_n}\right), \ P_{n+1}\left(\frac{3(t_{n+1}^2+1)}{2t_{n+1}}, \frac{3(t_{n+1}^2-1)}{2t_{n+1}}\right),$$

$$P_{n+2}\left(\frac{3(t_{n+2}^2+1)}{2t_{n+2}}, \frac{3(t_{n+2}^2-1)}{2t_{n+2}}\right), \ P_{n+3}\left(\frac{3(t_{n+3}^2+1)}{2t_{n+3}}, \frac{3(t_{n+3}^2-1)}{2t_{n+3}}\right).$$

由 (2) 可知，

$$\frac{3}{t_n} = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1} \Rightarrow t_n = 3\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{1-n}.$$

$$\therefore k_{P_nP_{n+3}} = \frac{\dfrac{3(t_{n+3}^2-1)}{2t_{n+3}} - \dfrac{3(t_n^2-1)}{2t_n}}{\dfrac{3(t_{n+3}^2+1)}{2t_{n+3}} - \dfrac{3(t_n^2+1)}{2t_n}} = -\frac{1+t_nt_{n+3}}{1-t_nt_{n+3}}, \quad k_{P_{n+1}P_{n+2}} = -\frac{1+t_{n+1}t_{n+2}}{1-t_{n+1}t_{n+2}}.$$

又

$$t_nt_{n+3} = 9\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{-2n-1}, \qquad t_{n+1}t_{n+2} = 9\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{-2n-1}.$$

故

$$k_{P_nP_{n+3}} = -\frac{1+9\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{-2n-1}}{1-9\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{-2n-1}} = -\frac{\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{2n+1}+9}{\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{2n+1}-9},$$

$$k_{P_{n+1}P_{n+2}} = -\frac{\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{2n+1}+9}{\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^{2n+1}-9}.$$

于是 $k_{P_nP_{n+3}} = k_{P_{n+1}P_{n+2}}$，故对于任意正整数 $n$，$S_n = S_{n+1}$。

---

**(1) 解法二**

可设

$$P_n\left(\frac{3(1+t_n^2)}{1-t_n^2}, \frac{6t_n}{1-t_n^2}\right), \quad Q_n \to t_m, \quad P_{n+1} \to t_{n+1}, \qquad \text{其中：} \ t_mt_{n+1} = -1.$$

$$k = \frac{t_nt_m+1}{t_n+t_m} = \frac{t_{n+1}-t_n}{t_nt_{n+1}-1} \Rightarrow t_{n+1}-t_n = k\cdot T \quad (T = t_nt_{n+1}-1).$$

$$x_n - y_n \to \frac{3(1-t_n)}{1+t_n},$$

$$\Rightarrow \frac{1-t_{n+1}}{1+t_{n+1}} \times \frac{1+t_n}{1-t_n} = \frac{-T-Tk}{-T+Tk} = \frac{1+k}{1-k}.$$

**(2) 解法二**

由 (2)

$$\frac{3(1-t_n)}{1+t_n}=q^{n-1}\quad\left(q=\frac{1+k}{1-k}\right)\Rightarrow\ t_n=\frac{3-q^{n-1}}{q^{n-1}+3}.$$

要证：$S_n=S_{n+1}$

$$\Leftrightarrow\ S_{P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}\Leftrightarrow\ k_{P_nP_{n+3}}=k_{P_{n+1}P_{n+2}}.$$

$$t_nt_{n+3}+1=\frac{18+2q^{2n+1}}{(q^{n-1}+3)(q^{n+2}+3)},\qquad t_n+t_{n+3}=\frac{18-2q^{2n+1}}{(q^{n-1}+3)(q^{n+2}+3)}.$$

$$\Rightarrow\ k_{P_nP_{n+3}}=\frac{t_nt_{n+3}+1}{t_n+t_{n+3}}=\frac{9+q^{2n+1}}{9-q^{2n+1}}.$$

同理：

$$k_{P_{n+1}P_{n+2}}=\frac{9+q^{2n+1}}{9-q^{2n+1}}\Rightarrow\ k_{P_nP_{n+3}}=k_{P_{n+1}P_{n+2}}.$$

## A.5 平移三角的参数表示

**平移三角的参数表示**

平移实质是降维计算☆

● **椭圆中的平移**

在椭圆中：

$$A\left(\frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2},\ \frac{2bt_1}{1+t_1^2}\right).$$

一般的我们向右平移 $a$ 个单位：

$$x_A+a=\frac{2a}{1+t_1^2}.$$

若向左平移 $a$ 个单位：

$$x_A-a=-\frac{2a\,t_1^2}{1+t_1^2}.$$

同理，向下/向上平移 $b$ 个单位：

$$\begin{cases}y_A+b=\dfrac{b(1+t_1)^2}{1+t_1^2},\\ y_A-b=-\dfrac{b(1-t_1)^2}{1+t_1^2}.\end{cases}$$

● **双曲线中的平移**

同样的在双曲线中：

$$A\left(\frac{a(1+t_1^2)}{1-t_1^2},\ \frac{2bt_1}{1-t_1^2}\right).$$

$$\begin{aligned}
\text{向右} \to a: &\quad \frac{2a}{1-t_1^2}, \\
\text{左} \to a: &\quad -\frac{2a\,t_1^2}{1-t_1^2}, \\
\text{上} \to b: &\quad \frac{b(2t_1+1-t_1^2)}{1-t_1^2}\ \text{（并不推荐）}, \\
\text{下} \to b: &\quad \frac{b(2t_1-1+t_1^2)}{1-t_1^2}\ \text{（并不推荐）}.
\end{aligned}$$

注意：一旦平移，所有坐标均需要平移。

**平移三角推两点式**

以椭圆为例：

$$\begin{aligned}
&y=\frac{2bt}{1+t^2}, \quad x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\
&x+a=\frac{2a}{1+t^2} \\
&x-a=\frac{-2at^2}{1+t^2} \\
&(t-t_1)(t-t_2)=0 \\
&t^2-(t_1+t_2)t+t_1t_2=0 \\
&\frac{2t^2}{1+t^2}-\frac{2(t_1+t_2)t}{1+t^2}+\frac{2t_1t_2}{1+t^2}=0 \\
&-\frac{(x-a)}{a}-\frac{y}{b}(t_1+t_2)+\frac{x+a}{a}t_1t_2=0 \\
&\qquad\qquad \Downarrow \\
&ay(t_1+t_2)-bx(t_1t_2-1)=ab(t_1t_2+1)
\end{aligned}$$

此处运用构造同构思想。

## A.6 仿射变换与三角的熔炉

在前面的七章中，我们已将三角代换在代数上的威力发挥到了极致。然而，真正的绝世高手，从不满足于机械的代数运算。"三角之道"的最高境界，是看透代数符号背后的**几何幽灵**。本章，我们将引入解析几何的降维重器——**仿射变换**，为您揭开参数 $t$ 真正的身世之谜。

### A.6.1 降维打击：从椭圆到辅助圆

**仿射变换的核心思想**

椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的计算之所以繁冗，皆因其 $x$ 轴与 $y$ 轴的地位不对等。若我们施展仿射变换，令：

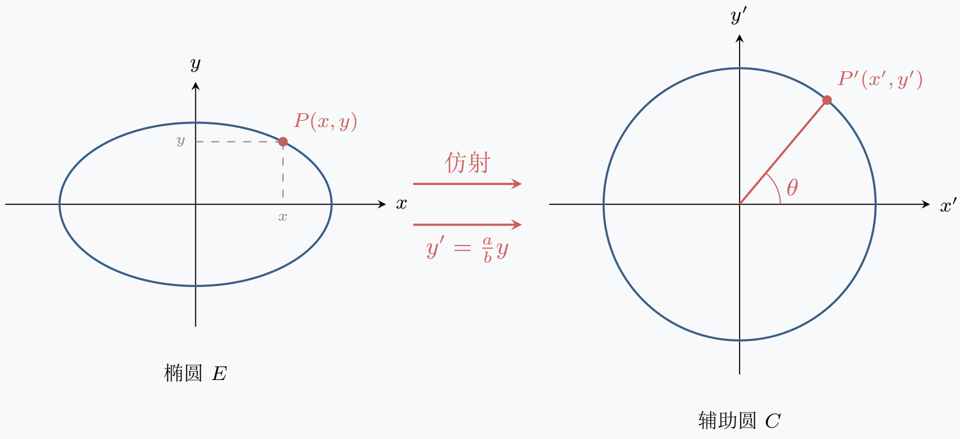
$$x'=x, \quad y'=\frac{a}{b}y$$

则椭圆瞬间被"拉伸"为**辅助圆** $C:x'^2+y'^2=a^2$。

---

**几何本质**

此时，椭圆上的动点 $P(x,y)$ 被映射为圆上的点 $P'(x',y')$。我们熟知的参数化 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$，在仿射变换的视角下，其**本质**就是——辅助圆上动点 $P'$ 的**圆心角**！




**仿射变换的核心性质**
仿射变换保持以下几何结构：

1. **共线性**：变换前共线的点，变换后仍共线；
2. **面积比**：变换后的面积关系为 $S' = \dfrac{a}{b} \cdot S$（等比放缩）；
3. **切线对应**：椭圆的切线变换后成为辅助圆的切线；
4. **中点、平行**：线段的中点仍是中点，平行线仍平行。

### A.6.2 半角参数 $t$ 的终极几何意义

**参数 $t$ 的几何身世**

我们在第一章引入了万能代换 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$，从而得到：

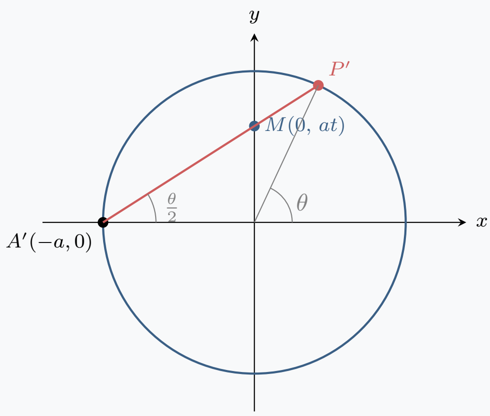
$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1+t^2}$$

这个 $t$ 究竟是何方神圣？它仅仅是一个代数巧合吗？**绝非如此！**

**● 辅助圆上的几何解释**
在辅助圆 $C$ 中，设左顶点为 $A'(-a, 0)$。连接 $A'$ 与动点 $P'(a\cos\theta, a\sin\theta)$，这条直线交 $y$ 轴于点 $M(0, m)$。由直线的斜率可知：

$$k_{A'P'} = \frac{a\sin\theta - 0}{a\cos\theta - (-a)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

而该直线在 $y$ 轴上的截距即为 $a \cdot \tan\dfrac{\theta}{2}$。




**核心洞见**

所谓的三角参数 $t$，在几何上，正比于**极点投影直线在虚轴（或短轴）上的截距！**

更直观地说：$t$ 就是从辅助圆的左顶点 $A'$ 出发、射向圆上动点 $P'$ 的射线，与 $y$ 轴交点的纵坐标（除以 $a$）。

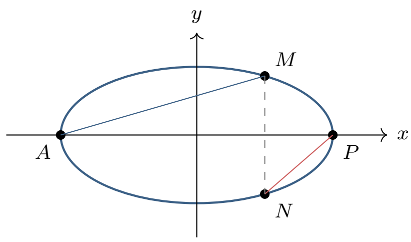
理解了这一点，你就能在面对极其复杂的动点共线、定点投影问题时，直接用**相似三角形的比例关系**秒杀，而无需动用哪怕一行的两点式方程。

### A.6.3 实战演练：仿射三角的降维打击

**例题 39：仿射三角降维示范**

**题目：** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，点 $P(2,0)$。过左顶点 $A(-2,0)$ 作直线交椭圆于 $M$，过点 $M$ 作 $x$ 轴的垂线交椭圆于 $N$（$M,N$ 关于 $x$ 轴对称）。求证：直线 $PN$ 的斜率与直线 $AM$ 的斜率之积为定值。

**解：**




**【常规解法】** 设 $M,N$ 坐标，求算斜率相乘。虽不难，但缺少美感。

**【三角解法】** 设 $M$ 对应的参数为 $t$，则 $N$ 对应的参数为 $-t$（由第三章$t$值分布可知，关于 $x$ 轴对称，参数互为相反数）。

此处 $a=2,\ b=1$，故：

$$M\left(\frac{2(1-t^2)}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right),\qquad N\left(\frac{2(1-t^2)}{1+t^2},\ -\frac{2t}{1+t^2}\right).$$

$$k_{AM}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}-0}{\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}-(-2)}=\frac{2t}{2-2t^2+2+2t^2}=\frac{2t}{4}=\frac{t}{2}$$

$$k_{PN}=\frac{\frac{-2t}{1+t^2}-0}{\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}-2}=\frac{-2t}{2-2t^2-2-2t^2}=\frac{-2t}{-4t^2}=\frac{1}{2t}$$

两者相乘：

$$\boxed{k_{AM}\cdot k_{PN}=\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{1}{4}}$$

定值瞬间跃然纸上。没有联立，没有韦达定理，只有最纯粹的**代数结构美**。

**技巧点拨**

**仿射视角的理解：** 上述问题在仿射变换 $y' = 2y$ 下，椭圆变为圆 $x^2 + y'^2 = 4$。关于 $x$ 轴对称的两点 $M, N$ 在圆上的对称性更加直观——$AM$ 与 $PN$ 的斜率之积为定值，本质上是辅助圆上**调和点列**的体现！
这揭示了一个深刻的事实：三角参数 $t$ 的代数优美性，正是仿射变换的几何优美性在代数层面的忠实投影。

## A.7 万剑归宗：焦半径公式的参数化

高考解析几何中，有一类问题让无数学子闻风丧胆：**焦半径与焦点弦的极值问题**。由于涉及到根号下的两点距离公式，常规联立往往会陷入"走火入魔"的计算深渊。但若将焦半径与三角参数强强联合，便能化繁为简，**万剑归宗**。

### A.7.1 距离的代数化表达

**三角焦半径终极公式**

对于椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，其右焦点为 $F(c, 0)$，离心率为 $e = \dfrac{c}{a}$。
根据圆锥曲线第二定义，椭圆上任意一点 $P(x, y)$ 到右焦点的距离为：

$$|PF| = a - ex$$

将我们的三角参数 $x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 代入：

$$|PF| = a - e \cdot a\frac{1-t^2}{1+t^2} = a\left(\frac{1+t^2-e(1-t^2)}{1+t^2}\right)$$

合并同类项，得到**三角焦半径终极公式**：

$$\boxed{|PF_{右}| = a \cdot \frac{(1-e)+(1+e)t^2}{1+t^2}}$$

同理，到左焦点的距离：

$$\boxed{|PF_{左}| = a \cdot \frac{(1+e)+(1-e)t^2}{1+t^2}}$$

**公式的代数结构剖析**

● **关键观察**
观察焦半径公式，分子和分母都是关于 $t^2$ 的**一次多项式**！

$$|PF| = a \cdot \frac{\alpha + \beta t^2}{1+t^2}, \qquad \alpha = 1-e,\ \beta = 1+e.$$

这意味着什么？这意味着无论焦点弦怎么转动，弦长的倒数、焦半径的比例，都将化为极其简单的**有理分式**。

● **特殊值一览**

| 参数 $t$ | 椭圆上的位置 | $\lvert PF_{右}\rvert$ | $\lvert PF_{左}\rvert$ |
|---|---|---|---|
| $t=0$ | 右顶点 $(a,0)$ | $a(1-e)=a-c$ | $a(1+e)=a+c$ |
| $t\to\pm\infty$ | 左顶点 $(-a,0)$ | $a(1+e)=a+c$ | $a(1-e)=a-c$ |
| $t=\pm1$ | 短轴端点 $(0,\pm b)$ | $a$ | $a$ |

可见，当 $t=\pm 1$ 时，$|PF_{右}|=|PF_{左}|=a$，恰好对应短轴端点——与几何直觉完全一致！

### A.7.2 焦半径同构的威力

**例题 40：焦点弦的调和性质**

**题目**：过右焦点 $F$ 的直线交椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 于 $A(t_1),B(t_2)$ 两点，求证：$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 为定值。

**证明：**

由焦点弦的特性可知，直线 $AB$ 过定点 $(c,0)$。利用我们在第三章学过的"定点统一变量"结论：

若直线过 $(c,0)$，则代入两点式可得：

$$t_1t_2=\frac{c-a}{c+a}=\frac{e-1}{e+1}=-\frac{1-e}{1+e}$$

接下来，写出焦半径的倒数：

$$\frac{1}{|AF|}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1+t_1^2}{(1-e)+(1+e)t_1^2}$$

同理：

$$\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1+t_2^2}{(1-e)+(1+e)t_2^2}$$

将两式相加并通分。记 $\alpha=1-e$，$\beta=1+e$，则 $t_1t_2=-\frac{\alpha}{\beta}$。

通分后的分子为：

$$\begin{aligned}&(1+t_1^2)[\alpha+\beta t_2^2]+(1+t_2^2)[\alpha+\beta t_1^2]\\&=2\alpha+\alpha(t_1^2+t_2^2)+\beta(t_1^2+t_2^2)+2\beta t_1^2t_2^2\\&=2\alpha+(\alpha+\beta)(t_1^2+t_2^2)+2\beta\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}\\&=2\alpha+2(t_1^2+t_2^2)+\frac{2\alpha^2}{\beta}\end{aligned}$$

通分后的分母为：

$$[\alpha+\beta t_1^2][\alpha+\beta t_2^2]=\alpha^2+\alpha\beta(t_1^2+t_2^2)+\beta^2t_1^2t_2^2=\alpha^2+\alpha\beta(t_1^2+t_2^2)+\alpha^2$$

经仔细化简（令 $s=t_1^2+t_2^2$，利用 $t_1^2t_2^2=\alpha^2/\beta^2$），最终分子与分母中的 $t$ 项完全抵消，得到：

$$\boxed{\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}}$$

这，就是三角代换赋予我们的权力：**将所有超越的、根号的、几何的难题，全部降维成关于 $t$ 的多项式游戏。**

**技巧点拨**

**焦点弦长公式的参数化推论：**

由 $|AF|+|BF|=2a$（焦点弦性质），结合 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}$，可以直接推出焦点弦长：

$$|AB|=|AF|+|BF|=2a,\qquad |AF|\cdot|BF|=\frac{b^2\cdot|AB|}{2a}=\frac{(2a)\cdot b^2}{2a}=b^2.$$

等等，上式仅在特殊情况下才成立！实际上 $|AF|+|BF|=2a$ 仅当 $A,B$ 在同侧焦点时成立。一般地，焦点弦长为：

$$|AB|=\frac{2b^2}{a}\cdot\frac{1+t_1^2t_2^2}{(\alpha+\beta t_1^2)(\alpha+\beta t_2^2)/(1+t_1^2)(1+t_2^2)}.$$

善用焦半径公式可快速处理各类焦点弦极值问题！

## 本章小结

### ● 第八章回顾

1. **仿射变换**将椭圆化为辅助圆，揭示了参数 $\theta$ 的圆心角本质；
2. **半角参数** $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 的几何意义：左顶点到动点射线与 $y$ 轴交点的纵坐标；
3. 仿射变换保持共线性、面积比、切线对应等核心性质。

### ● 第九章回顾

1. **焦半径公式**：$|PF|=a\cdot\dfrac{(1-e)+(1+e)t^2}{1+t^2}$，分子分母均为 $t^2$ 的一次式；
2. **焦点弦性质**：过焦点时 $t_1t_2=-\dfrac{1-e}{1+e}$，配合焦半径可秒杀定值问题；
3. 三角代换的核心归宿：**将所有难题降维成关于 $t$ 的有理分式运算**。

**终极感悟**

从第一章的万能代换初见，到本章的仿射几何与焦半径的完美融合——三角之道的真谛，不在于记住了多少公式，而在于你是否真正**看透了 $t$ 背后的几何世界**。

当代数与几何在 $t$ 这个小小字母上交汇之时，一切繁冗的联立、韦达、判别式，都将化为乌有。留下的，只有最纯粹的**数学之美**。

# 赞助者名单

首先非常感谢小陈的大力宣传，也十分感谢曦白在各方面时对我们工作的帮助，同时也感谢试读群中辉-FTIC、假期我所欲也、chocolate020、脆甜筒积极参与和热心反馈，使得这篇文章以更好的形式得以被更多人看到；也感谢每一位支持者的慷慨赞助，正是你们的支持让我们有了继续创作的动力。

感谢以下每一位支持者（排名不分先后）：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 曦白 | 喜樂 | 啊泽 | 易棕炜 | 吴适莫 |
| Hodge | 补药 | 云玲 | chocolate020 | 廖梓渝 |
| Pop家 | 赵冰倩 | 刘春苗 | 努力拼搏 | SilentNiwa |
| i-PrOH | 折戟沉沙 | 小羊 | 金千皓 | 初晨 |
| 墨宇 | 贾浩然 | LJK | Cynicism | 美日 |
| kotoku | 不知叫啥 | 异界中 | 怀柔 | MLP团队 |
| 赫He | 一只虾丸 | 数学好玩 | 我只有一个y | 倾城 |
| echo | 假期我所欲也 | 辉-FTIC | 钓蛤蟆 | 晚秋 |
| 可乐ya | MST老唐 | 周浩 | MST涛哥数学 | 知 |
| 幸运小马 | 橱窗人 | rocky | 富 | GT |
| DF | 哇哈哈 | galois | 与你听闻 | 雾中寻路 |
| Achq | 浮游 | 浙江兰溪施正宇 | 花卷 | 小满胜万全 |
| nwj | row | 脆甜筒 | – | – |